Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Ciudad de México

Tarea de Verano 2019

Combinatoria

1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un $24-$ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia. Se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

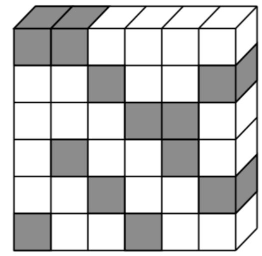
   - Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices, así como del foco del centro.
   - Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices, así como del foco del centro.

   Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible llegar a una configuración en la que todos los focos están encendidos.

2. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultnea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.

Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectngulo de 3×2 o de 2×3.

3. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la siguiente ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).



Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1, 3, 4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1, 2, 2)$ borrará sólo el número 1. Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

Álgebra

1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) que cumplan la ecuación $abc = a + b + c + 1$.

2. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que $m < s < M$.

3. Un subconjunto B de $\{1, 2, ..., 2017\}$, tiene la propiedad T si: Cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva). De-

termina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el proceso aplicado al 938 es 102, ya que $\frac{(938-(9+3+8))}{9} = 102$. Aplicado dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0. Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la casa de n. ¿Cuántos números menores que 26 mil tienen la misma casa que el 2012?

Geometría

1. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P, y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

2. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

3. Sean C_1 una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y l la recta tangente a C_1 en P. Considera un punto Q sobre l, distinto de P, y sea C_2 la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a C_1 en S y la recta PS intersecta a C_2 en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de C_1 y C_2, respectivamente, muestra que
$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$$

4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el

punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

Teoría de números

1. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

2. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \cdots$ Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

3. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

4. Decimos que un número entero no-negativo n contiene a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a $2, 0, 1, 6, 20, 16, 201$ y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.