Olimpiadas de Matemáticas Ciudad de México

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Educación Básica
Ciudad de México

28 de febrero
2do y 3ro Secundaria

1. ¿Cuántos dígitos tiene el número $2^{2019} \times 5^{2023}$?

2. ¿Cuántos ceros hay al final del número $10!$? ¿Y de $100!$?

3. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b + c$

4. Si $a \mid b$ entonces $a \mid bc$

5. Si $a \mid b$ y $a \mid b + c$ entonces $a \mid c$

6. Demuestra que si el número pA es divisible entre q y ademas sabemos que p y q son primos relativos, entonces A es divisible entre q.

7. Demuestra que si un número natural es divisible entre dos números primos relativos p y q, entonces el número es divisible entre pq.

8. Pruebe que el producto de cualesquiera tres números naturales consecutivos es divisible entre 6.

9. Prueba que el producto de cualesquiera 5 números naturales consecutivos es
   - divisible entre 30
   - divisible entre 120

10. Sea a un entero impar. Demuestra que
    - $a^2 - 1$ es divisible por 8
    - $a^4 - 1$ es divisible por 16

11. En cada una de las caras de un cubo, se escribe un número entero positivo y en cada vértice se escribe el producto de los números de las tres caras adyacentes a ese vértice. Si la suma de los números en los vértices es 105, ¿cuánto vale la suma de todas las caras?

12. Si $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ es la descomposición canónica del entero a, probar que el número de divisores positivos de a es $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$.

13. ¿Cuántos divisores tiene $10!$?

14. ¿Cuántos divisores positivo tiene el número 600?

15. Sean a y b con $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, $b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_k^{f_k}$, donde $p_1 < p_2 < p_3 < \cdot < p_k$ son primos positivos y las e_i y las f_i son enteros no negativos. Entonces el máximo común divisor es

$$d = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$$

donde $m_i = min\{e_i, f_i\}$.

16. Demuestra que $(a, b) \times [a, b] = ab$

17. Hallar todos los enteros positivos que sean iguales a 700 veces la suma de sus dígitos.

18. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.