Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal
Concurso de Primaria y Secundaria 2015-2016

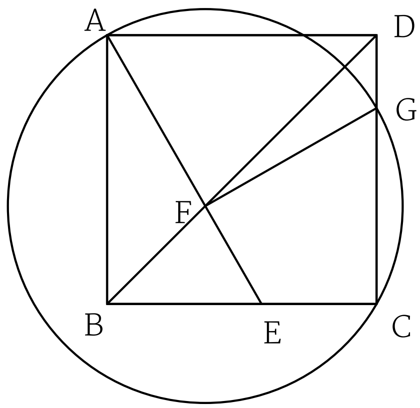
Repetidores 20 y 30

Tarea de invierno

Cuidad de México

- ▷ Esta tarea la tienes que entregar el sábado 9 de enero, en el entrenamiento.
- ▷ Por favor, entrega **PROBLEMAS DIFERENTES EN HOJAS DIFERENTES.**
- ▷ No entregues únicamente la respuesta de los problemas, incluye TODO el procedimiento que usaste para llegar a la respuesta. La respuesta sola no valdrá puntos, aún si está bien. Lo que calificaremos es el procedimiento.
- ▷ La tarea consta de 15 problemas. Te recomendamos hacer un problema al día y tomar algunos días de descanso. De esa manera te mantendrás practicando todas las vacaciones y no perderás el ritmo de trabajo.
- ▷ Así como los problemas de los exámenes de la olimpiada no son como los problemas que te ponen en los exámenes de tu escuela, la tarea no es una tarea como las de la escuela. Si intentas empezarla el día antes de que la tienes que entregar, probablemente no te dará tiempo de acabarla, por lo que te recomendamos hacerla con tiempo.
- ▷ Acuérdate que muchas veces lo difícil de un problema no es resolverlo, sino escribir su solución. Te recomendamos que en cuanto acabes de resolver un problema, escribas todos los detalles de su solución y te asegures de que todos los pasos están bien justificados.

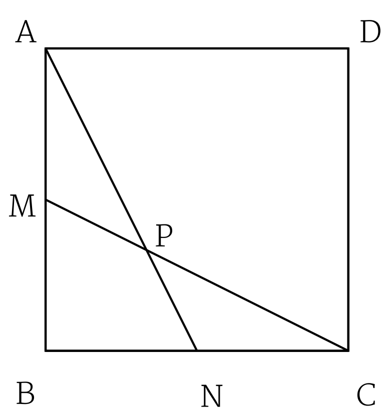
1. Se tiene un cuadrado $ABCD$ y un punto E sobre el lado BC. La intersección de AE con BD es el punto F. Con centro en F se traza una circunferencia que pasa por el punto A, esta circunferencia intersecta al lado CD en G. Calcula el valor de $\angle GFE$.



2. Un entero positivo N tiene tres dígitos y el producto obtenido al multiplicar los dígitos de N es un número de 3 dígitos. ¿Cuál es el menor valor posible que puede tomar N?

3. Marcos juega un juego de computador en una cuadrícula de 4×4. Cada celda es roja o azul, pero el color sólo se ve si se hace clic en ella. Se sabe que sólo hay dos celdas azules, y que tienen un lado común. ¿Cuál es el menor número de clics que Marcos tiene que hacer para estar seguro de ver las dos celdas azules en la pantalla?

4. En el cuadrado $ABCD$, M y N son los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Las rectas AN y CM se intersectan en el punto P. Demuestra que DP es perpendicular a MN.



5. Juana tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieran en una rotación se consideran equivalentes. ¿De cuántas maneras no equivalentes puede Juana pintar su tablero?

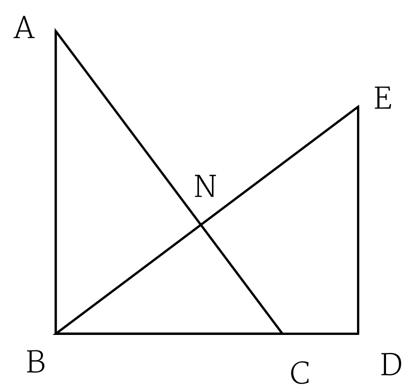
6. Diego escribe todos los número enteros m positivos de tres dígitos con las siguientes 2 propiedades:

   (a) m no es múltiplo de 2, 3 ni de 5;

   (b) ningún dígito de m es múltiplo de 2, 3 ni de 5.

   ¿Cuántos números escribió Diego?

7. Se tienen dos triángulos rectángulos, ABC y BDE. Se sabe que los catetos AB y BD miden 4 cada uno y que los catetos BC y DE miden 3 cada uno. Si N es el punto de intersección de AC con BE, calcula el área del triángulo BCN.



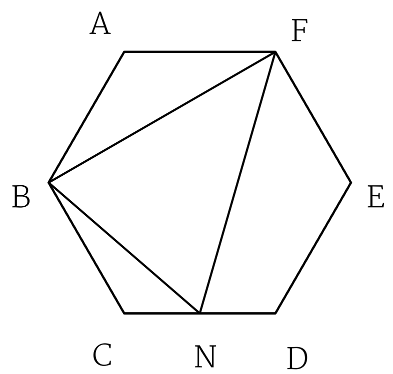
8. Encuentra una fracción $\frac{m}{n}$, con m distinto de n, tales que todas las fracciones

$$\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$$

   puedan ser simplificada. Ejemplo: $\frac{62}{2015}$ puede ser simplificada ya que $\frac{62}{2015} = \frac{2}{65}$.

9. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera: Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito iniciando por un cubito de la orilla y terminando en el cubito central. Además, cada vez que come un cubito, el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (es decir, uno de los que tienen una cara común con el último comido). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esta manera?

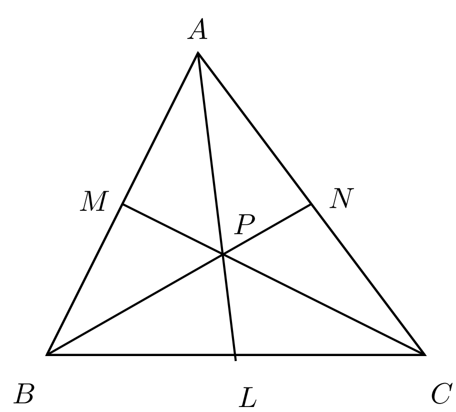
10. Se tiene un hexágono regular $ABCDEF$ y N el punto medio de CD. Calcula el valor del área del triángulo BNF, si el lado del hexágono mide 6.



11. Considera la sucesión $5, 55, 555, 5555, 55555, \ldots$. ¿Algún número de la sucesión es múltiplo de 495?, si es así, ¿cuál es el menor de ellos?

12. Dada una sucesión x_n se sabe que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_n = x_{n-3} + x_{n-2} - x_{n-1}$ para n mayor a 3. ¿Qué número ocupa el lugar 2016 en la sucesión?

13. Se tiene un triángulo ABC donde M y N son los puntos medios de los lados AB y CA, respectivamente. Las rectas BN y CM se cortan en el punto P y AP intersecta al lado BC en L. Si el área del triángulo ABC es 42, ¿cuál es el área del triángulo BPL?



14. ¿Cuál es el entero positivo más chico tal que es dos veces el cuadrado de algún entero positivo y además es cinco veces la potencia quinta de algún otro entero positivo?

15. Se tienen dos pilas de cartas, una con 2015 cartas y otra con 2016 cartas. A y B juegan alternadamente, realizando en cada turno una de las siguientes operaciones:

   - Quitar una carta de una pila.
   - Quitar una carta de cada pila.
   - Mover una carta de una pila a la otra.

   El jugador A comienza el juego y gana el que quite la última carta. Determine si alguno de los jugadores tiene estrategia ganadora y descríbala.