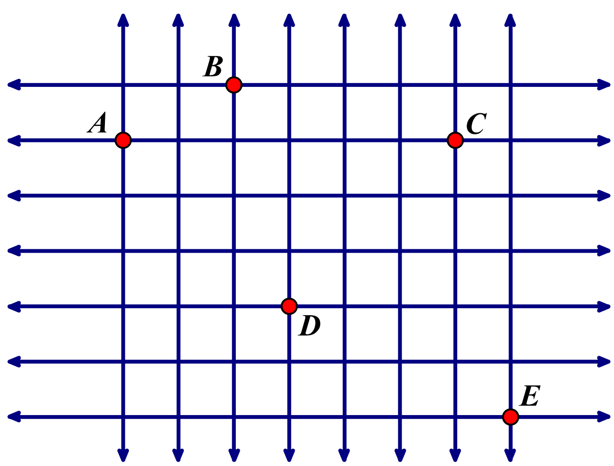
Concurso de Secundaria 2014-2015
Primera etapa

Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal

Soluciones a la Primera Etapa del Nivel I

Problema 1. En una ciudad hay cinco museos, llamémoslos A, B, C, D y E. El turista Gerardo visita cada uno de los museos una sola vez. Comienza el día en el museo D y de ahí en adelante visita, de entre los museos que no ha visitado aún, aquel que esté a menos cuadras del que se encuentra en ese momento. ¿En qué orden visita los cinco museos?



a) $DBACE$ b) $DABCE$ c) $DBAEC$ d) $DCBAE$

Solución. Comenzando en D el punto A está a 6 cuadras, B está a 5, C a 6 y E a 6, por lo tanto Gerardo se mueve de D a B. Ya en el punto B es claro que A es el que está a menos cuadras. Caminando a A, C queda a 6 cuadras mientras que E a 12, por lo que el siguiente museo en el recorrido es el C. Finalmente Gerardo visita el museo E. Por lo tanto la respuesta correcta es la a).

Problema 2. Cuando al robot Saúl se le dan dos números, multiplica al primero por cuatro y le resta el segundo que se le dio, después dice en voz alta el resultado. Si se le da el número 8 primero y luego el 2, ¿cuál número dirá en voz alta?

a) 0 b) 6 c) 30 d) 46

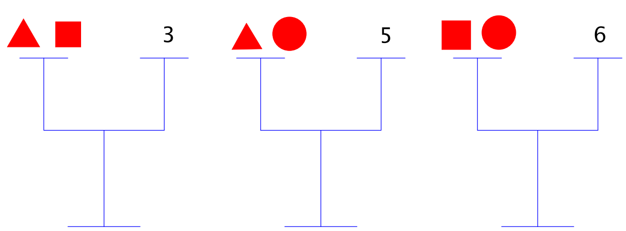
Solución. Llamemos a al primer número que se le dio al robot y b al segundo número. El proceso que lleva a cabo robot Sául se puede expresar algebraicamente como $4a - b$. Si sustituimos los valores podemos obtener el resultado $4 \cdot 8 - 2 = 32 - 2 = 30$.

Problema 3. Zeus, Chinney, Kenia y Adriana visitaron México. Uno de ellos fue al DF, otro a Ensenada, otro a Guanajuato y el otro a San Luis Potosí. Ninguna de las niñas fue al DF. Una niña se la pasó mucho tiempo en la playa. A Chinney nunca le ha gustado San Luis Potosí. Zeus no visitó el DF. Kenia se paseó por los callejones de Guanajuato. ¿A dónde fue Pablo?

a) DF b) Ensenada c) Guanajuato d) San Luis Potosí

Solución. Nos dicen que ninguna niña fue al DF, entonces descartamos a Kenia y a Adriana, más adelante nos dicen que Zeus no visitó el DF. Por lo tanto el único que fue al DF fue Chinney.
Kenia fue a Guanajuato, entonces Kenia no fue a la playa, de donde se puede deducir que Adriana fue a la playa. Como dentro de las opciones, Ensenada es la única ciudad con playa, entonces Kenia fue a Ensenada.
Por lo tanto Zeus fue a San Luis Potosí.
Con lo cual concluimos que la respuesta correcta es la d).

Problema 4. Las siguientes balanzas están equilibradas, ¿cuánto pesan el círculo, el cuadrado y el triángulo juntos?

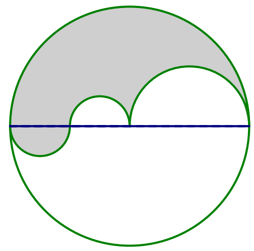


a) 2 b) 4 c) 7 d) 8

Solución. Observemos que la suma de los pesos de las figuras en los lados izquierdos de las tres balanzas es igual a la suma de los números en los lados derechos de las tres balanzas. Por lo que dos círculos, dos cuadrados y dos triángulos juntos pesan $3 + 5 + 6 = 14$. Por lo tanto el peso de un círculo, un cuadrado y un triángulo juntos es $\frac{14}{2} = 7$. Así que la respuesta correcta es la c).

Problema 5. Calcula el área sombreada de la siguiente figura formada por semicircunferencias de diámetros 1,1,2 y 4 respectivamente.

a) 2π b) $\frac{3}{2}\pi$ c) $\frac{15}{4}\pi$ d) 4π



Solución. Llamemos A al área de la mitad del círculo de diámetro 4, B el área de de la mitad del círculo de diámetro 2 y C el área de de la mitad del círculo de diámetro 1. Entonces tenemosque:

$$A = \frac{(2)^2\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

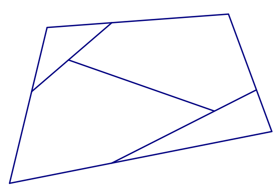
$$B = \frac{(1)^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$$

Observemos que el área sombreada es la mitad superior del círculo de diámetro 4 menos la mitad del círculo de diámetro 2, la mitad del círculo de diámetro 1, más la mitad del círculo de diámetro 1, es decir :

$$A - B - C + C = A - B = 2\pi - \frac{1}{2}\pi = (2 - \frac{1}{2})\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Por lo tanto la respuesta correcta es b).

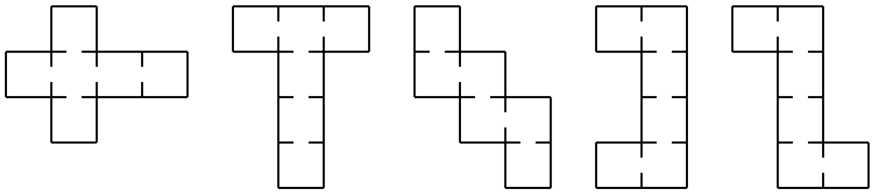
Problema 6. Pardo quiere colorear las cuatro regiones del cuadrilátero de azul, rojo y verde, de manera que dos regiones que se tocan tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo?



a) 4 b) 6 c) 8 d) 9

Solución Empecemos con una de las regiones triangulares, cualquier color que pongamos ahí tendrá que ser igual al color que pongamos en la otra región triangular. Lo anterior se debe a que las dos regiones triangulares no se tocan, pero ambas tocan a las otras dos regiones. Hay tres formas de elegir el color de las dos regiones triangulares, y por cada de esas formas hay dos formas de poner los colores de adentro. Entonces hay $3 \cdot 2 = 6$ formas, por lo que la respuesta correcta es la b).

Problema 7. ¿Cuántas de las siguientes figuras forman un cubo al doblarse adecuadamente por las lineas punteadas?



a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

Solución. La cuarta figura es la única que al doblarse no forma un cubo, por lo que hay cuatro figuras que sí forman un cubo, por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 8. Se tienen dos tableros con 72 lámparas cada uno. El primero tiene todas las lámparas encendidas, el segundo, las tiene apagadas. Cada vez que se apagan 6 lámparas del primero, se encienden 3 lámparas del segundo. Esta operación se repite hasta que los dos tableros tengan igual número de lámparas encendidas. Al final, ¿cuántas lámparas quedan encendidas en cada tablero?

a) 12 b) 24 c) 36 d) 48

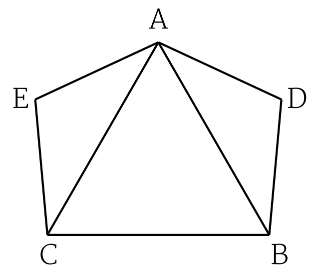
Solución. Al restar focos encendidos al primer tablero, estamos sumando focos encendidos al segundo tablero. Después de la primera operación hay $72-6$ focos encendidos del primer tablero, mientras que hay 3 focos encendidos en el segundo tablero. Al hacer dos veces la opercación tendremos $72-(6\times 2)$ focos encendidos en el primer tablero y 3×2 en el segundo. Así después de realizar la operación n veces, habrá $72-6n$ focos encendidos en el primer tablero, mientras que en el segundo tablero habrá $3n$. Como buscamos que sean la misma cantidad, se debe de cumplir Ãa ecuación $72-6n=3n$, de la cual se deduce $n=8$. Como en la n-ésima modificacón hay $3n$ focos en el segundo tablero y después de 8 de estas se llega a que hay la misma cantidad de focos en ambos, habrá $3\cdot 8=24$ focos en ambos tableros.
Por lo tanto la respuesta correcta es b).

Problema 9. El joven Fernández compró 12 flores para obsequiarles a su novia y a sus 4 amigas. Si a cada amiga le da al menos una flor y a su novia le da más flores que a cualquier otra, ¿cuál es le mínimo número de flores que le da a su novia?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Solución. Si el joven Fernández le diera 3 flores o menos a su novia, significa que repartió 9 flores entre sus 4 amigas. Entonces al menos una de ellas recibiría por lo menos 3, ya que $2\cdot 4=8<9$. Si le da 4 flores a su novia y dos a cada amiga se cumple que todas reciben flor y su novia recibe más que las demás. Por lo tanto el mínimo es 4 y la respuesta correcta es la b).

Problema 10. El triángulo ABC es equilátero y los triángulos ABD y CAE son isósceles con $BD=DA=AE=EC$. Si el permetro del triángulo ABC es $18cm$ y el del ACE es $14cm$. ¿Cuánto es el perímetro del pentágono $AECBD$?



a) 17 b) 21 c) 22 d) 26

Solución. Como el triángulo ABC es equilÃątero se tiene que $AB = BC = CA$ y como $AB + BC + CA = 18$ entonces $AB = BC = CA = 18/3 = 6$.
Además $AC+CE+EA = 6+CE+EA = 14$, y como $CE = EA$ se sigue que $CE = EA = (14-6)/2 = 4$.
Por lo tanto el perímetro del pentÃągono $AECBD$ es $CE+EA+AD+DB+BC = 4+4+4+4+6 = 22$.
Y por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 11. Cada que Isabel ve un número en el pizarrón efectúa el siguiente proceso: le resta al número el dígito que tiene en las unidades y al número obtenido lo divide entre 10. Ella repite lo anterior hasta que queda un número de un solo dígito en el pizarrón. Si empieza con el número 20142014, ¿con cuál número terminará?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

Solución. Observemos que el dígito de las unidades del número 20142014 es 4. Entonces, cuando Isabel empieza con el proceso, efectúa la siguiente operación

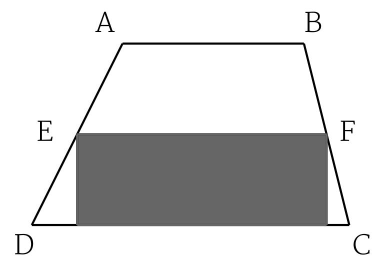
$$\frac{20142014 - 4}{10} = \frac{20142010}{10} = 2014201.$$

Después del primer paso del proceso, Isabel obtiene el número 2014201, el cual tiene el número 1 en el número de las unidades. Entonces Isabel efectúa la siguiente operación en el segundo paso del proceso

$$\frac{2014201 - 1}{10} = \frac{2014200}{10} = 201420.$$

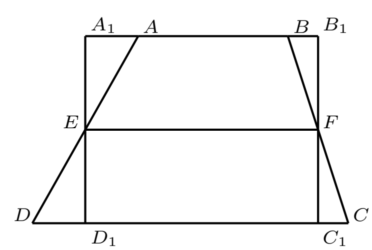
Después de efactuar estos dos pasos del proceso, podemos observar que hacer un paso del proceso de Isabel, es simplemente borrar del pizarrón el dígito de las unidades del número que obtuvo en el paso anterior. Lo cual tiene sentido ya que si a es el dígito de las unidades de un número n, podemos expresar a n como $n = 10b + a$ donde b será el número que resulta al quitarle el dígito de las unidades.
Con esto podemos deducir que el número con el cual termina Isabel en el pizarrón es el 2, ya que es el primer dígito del número inicial. Y por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 12. Calcula el área del trapecio $ABCD$ si el área de la figura sombreada es 10 y E y F son puntos medios de AC y BD respectivamente.



a) 16 b) $\frac{31}{2}$ c) 20 d) $\frac{37}{2}$

Solución. Dibujamos A_1, B_1, C_1 y D_1 de manera que tanto A_1, E y D_1 como B_1, F y C_1 estén sobre una línea. Notemos que como E y F son puntos medios, entonces EF es paralela a AB. Debido a que las rectas AB y DC son paralelas, el ángulo $\angle A_1AE$ es igual al ángulo $\angle EDD_1$, por la misma razón tenemos $\angle AA_1E = \angle DD_1E$ y $\angle D_1ED = \angle AEA_1$, así que los triangulos $\triangle AEA_1$ y $\triangle DED_1$ tienen los mismos angulos y un lado correspondiente mide lo mismo ($AE = ED$), entonces estos triangulos son congruentes, y por lo tanto tienen la misma área.
De una manera análoga podemos concluir que los triángulos $\triangle BB_1F$ y $\triangle C_1FC$ tienen la misma área. Así podemos calcular el área del trapecio calculando el área del rectángulo $A_1B_1C_1D_1$ y debido a que $A_1E = ED_1$, los rectangulos A_1EFB_1 ,ED_1C_1F tienen la misma área que es igual a 10 . Así el área del trapecio $ABCD$ es 20. Es decir, la respuesta correcta es la c).



Problema 13. Mi mamá compra 8 rosas rojas todas las semanas y las reparte entre los 3 floreros de la casa. Un florero está en la sala, otro en el comedor y el otro en el dormitorio. ¿De cuántas formas diferentes puede distribuir las flores entre los floreros si quiere que todas las habitaciones tengan por lo menos una flor?

a) 16 b) 21 c) 24 d) 32

Dividamos el problema en casos, primero escogeremos cuántas flores irán en la sala, para cada una de esas elecciones escogeremos cuántas, de las restantes, irán en el comedor y con esto la cantidad de flores en el dormitorio quedará determinada.
El primer caso es cuando el florero de la sala tiene una flor, el segundo caso es cuando tiene dos flores y así sucesivamente hasta el sexto caso.
En el primer caso, el florero del comedor puede tener desde una hasta seis flores (si tuviera más flores entonces el florero del dormitorio se quedaría sin ninguna), y ya escoigada la cantidad de

flores en el comedor en el dormitorio irán las restantes. Así podemos ver que hay seis formas de arreglar las 8 flores si se coloca una flor en el primer florero.
Los casos del 2 al 6 se pueden analizar de manera análoga. Cuando hay 2 flores en la sala hay 5 maneras de repartir las flores entre las otras habitaciones. De la misma forma, en el caso en el que hay 3 flores en la sala hay 4 formas de redistribuir las restantes.
Continuando de la misma manera en los otros casos podemos concluir que la cantidad de formas que hay para distribuir las flores en la casa es $1+2+3+4+5+6=21$.

NOTA: Esta operación se puede realizar utilizando la suma de Gauss para un problema en donde se consideren más flores y los mismos tres floreros (con la suma de Gauss nos referimos a la fórmula $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$). El problema también se puede resolver con un método más avanzado de combinatoria conocido como “separadores".

Problema 14. Los números A y B son dos números enteros diferentes escogidos entre 1, 2,…,40 inclusive. ¿Cuál es el mayor valor que puede alcanzar la siguiente expresión?

$$\frac{AB}{A-B}$$

a) 1481 b) 1521 c) 1560 d) 1600

Solución. La expresión que queremos maximizar es una fracción; por lo tanto deseamos encontrar algún par de valores para A y B que cumplan que, al mismo tiempo, el numerador (AB) sea muy grande y el denominador ($A-B$) sea muy chico. Notemos que A, B son positivos, por lo tanto AB siempre será positivo. Consecuentemente, podemos concluir que $A>B$ pues de no ser así, la fracción que buscamos maximizar tomaría un valor negativo. Veamos que el valor mínimo que puede tomar $A-B$ es 1, en el caso de que A y B sean consecutivos. Observemos que el valor máximo que puede tomar AB es $40\cdot 39$ pues estos son los valores más grandes que pueden tomar A y B. Por lo tanto, la pareja que buscamos es $A=40, B=39$ ya que simultáneamente maximiza el numerador y minimiza el denominador. Sustituyendo estos valores obtenemos $\frac{AB}{A-B}=\frac{40\cdot 39}{40-39}=1560$. Por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 15. El Reforma, La Jornada y el Universal cubren una carrera de caballos en donde hubo únicamente 3 participantes: Lykos, Ferenic y Pasacas. Cada periódico reportó una verdad y una mentira sobre la carrera. El Reforma dijo: el ganador no fue Lykos; el ganador no fue Ferenic. La Jornada dijo: Ferenic llegó en último; Lykos llegó antes que Pasacas. El Universal dijo: Ferenic llegó antes que Pasacas; Pasacas llegó antes que Lykos. ¿En qué órden llegaron?

a) Ferenic, Pasacas, Lykos b) Lykos, Pasacas, Ferenic c) Pasacas, Lykos, Ferenic d) No hay suficiente información para decidir.

Solución. La respuesta correcta en éste caso es la “d", es decir, no hay suficiente información para decidir.

Para ver que ésto es correcto veremos que hay dos esquemas de llegada que nos funcionan como solución:

- 1- Ferenic 2- Lykos 3- Pasacas

  Vamos a considerar que la afirmación del Reforma que es verdadera es *"el ganador no fue Lycos"*, con lo que en automático, es falsa la afirmación *"el ganador no fue Ferenic"* por lo cual sabemos que, de hecho, *el ganador fue Ferenic*.

  Como sabemos que *el ganador fue Ferenic* la afirmación de La Jornada *"Ferenic llegó en último"* debe ser falsa y entonces su afirmacion que es cierta es *"Lycos llegó antes que Pasacas"*.

  Para El Universal tenemos que la veracidad de *"Lycos llegó antes que Pasacas"* nos forza a que la afirmación *"Pasacas llegó antes que Lycos"* sea falsa, por lo que forzosamente deberá ser cierto que *"Ferenic llegó antes que Pasacas"*.

  Podemos ver que las afirmaciónes y negaciones escogidas son ciertas en el esquema de lugares que dimos; además, al suponer cierto *"el ganador no fue Lycos"* condicionamos cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales son falsas.

- 1- Lycos 2- Ferenic 3- Pasacas

  Al igual que en el caso anterior veremos que suponiendo una de las afirmaciones cierta se condicionaran las demás. En éste caso consideraremos que la afirmación verdadera de El Reforma es *"el ganador no fue Ferenic"* y la falsa es *"el ganador no fue Lycos"*; con ésto sabemos que *el ganador fue Lycos*.

  De lo último tenemos que, para La Jornada, debe ser cierto *"Lycos llegó antes que Pasacas"* y por lo tanto es falso que *"Ferenic llegó en último"*; de ésto sabemos que *Ferenic no llegó en último*.

  Utilizando que *el ganador fue Lycos* y que *Ferenic no llegó en último* podemos definir los lugares que debieron ocupar los participantes tal y como lo hicimos en nuestro esquema de llegadas. Resta ver que para ésta configuración se pueda elegir una afirmación verdadera y una falsa de El Universal.

  Por ser cierto (de La Jornada) que *"Lycos llegó antes que Pasacas"* entonces es falso que *"Pasacas llegó antes que Lycos"*; finalmente es cierto que *"Ferenic llegó antes que Pasacas"*, lo cual nos dice que el esquema propuesto también resulto posible.

Al haber dos posibles esquemas de llegada se concluye que no tenemos suficiente información para decidir.