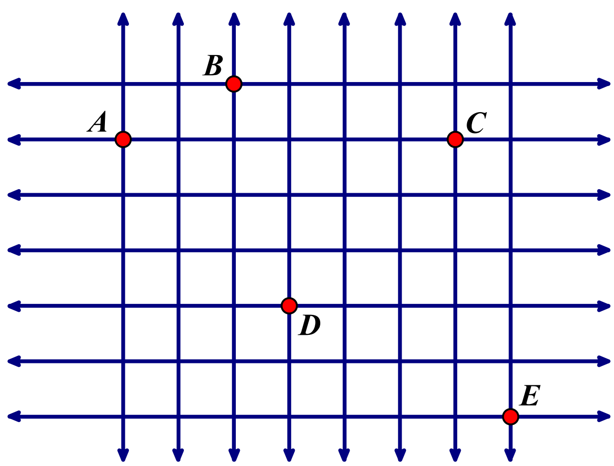
Concurso de Secundaria 2014-2015
Primera etapa

Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal

Soluciones a la Primera Etapa del Nivel II

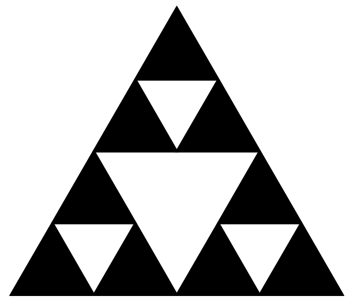
Problema 1. En una ciudad hay cinco museos, llamémoslos A, B, C, D y E. El turista Gerardo visita cada uno de los museos una sola vez. Comienza el día en el museo D y de ahí en adelante visita, de entre los museos que no ha visitado aún, aquel que esté a menos cuadras del que se encuentra en ese momento. ¿En qué orden visita los cinco museos?



a) $DBACE$ b) $DABCE$ c) $DBAEC$ d) $DCBAE$

Solución. Comenzando en D el putnto A está a 6 cuadras, B está a 5, C a 6 y E a 6, por lo tanto Gerardo se mueve de D a B. Ya en el punto B es claro que A es el que está a menos cuadras. Caminando a A, C queda a 6 cuadras mientras que E a 12, por lo que el siguiente museo en el recorrido es el C. Finalmente Gerardo visita el museo E. Por lo tanto la respuesta correcta es la a).

Problema 2. La siguiente figura está formada por triángulos equiláteros. Si el área del triángulo más grande es 1. ¿Cuánto mide el área sombreada?



a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{8}$

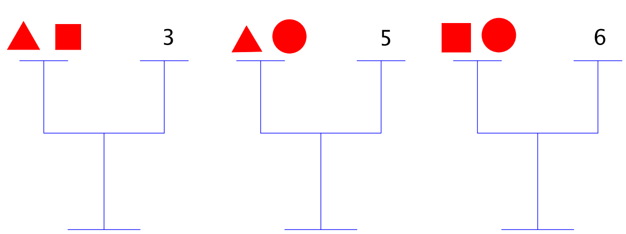
Solución. El triángulo más grande está dividido en 4 triángulos equiláteros iguales, y estos, a su vez están divididos en otros 4 triángulos equiláteros iguales, por lo tanto el triángulo más grande consta de 16 triángulos equiláteros pequeños, todos del mismo tamaño, por lo que cada uno de estos triángulos tiene área $\frac{1}{16}$. Como hay 9 triángulos pequeños sombreados el área sombreada mide $\frac{9}{16}$.
Por lo tanto la respuesta correcta es la a).

Problema 3. Zeus, Chinney, Kenia y Adriana visitaron México. Uno de ellos fue al DF, otro a Ensenada, otro a Guanajuato y el otro a San Luis Potosí. Ninguna de las niñas fue al DF. Una niña se la pasó mucho tiempo en la playa. A Chinney nunca le ha gustado San Luis Potosí. Zeus no visitó el DF. Kenia se paseó por los callejones de Guanajuato. ¿A dónde fue Zeus?

a) DF b) Ensenada c) Guanajuato d) San Luis Potosí

Solución. Nos dicen que ninguna niña fue al DF, entonces descartamos a Kenia y a Adriana, más adelante nos dicen que Zeus no visitó el DF. Por lo tanto el único que fue al DF fue Chinney.
Kenia fue a Guanajuato, entonces Kenia no fue a la playa, de donde se puede deducir que Adriana fue a la playa, como dentro de las opciones Ensenada es la única ciudad con playa, Kenia fue a Ensenada.
Por lo tanto Zeus fue a San Luis Potosí.
Con lo cual concluimos que la respuesta correcta es la d).

Problema 4. Las siguientes balanzas están equilibradas, ¿cuánto pesan el círculo, el cuadrado y el triángulo juntos?



a) 2 b) 4 c) 7 d) 8

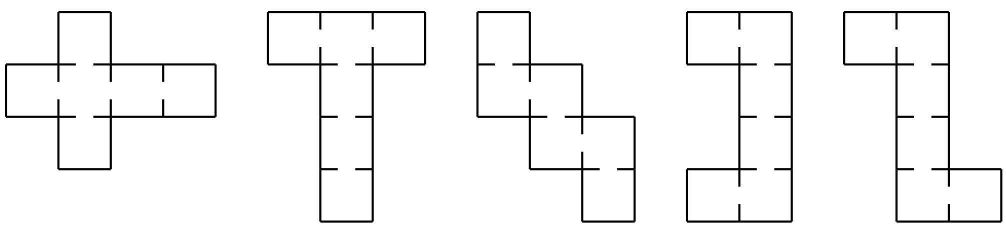
Solución. Observemos que la suma de los pesos de las figuras en los lados izquierdos de las tres balanzas es igual a la suma de los números en los lados derechos de las tres balanzas. Por lo que dos círculos, dos cuadrados y dos triángulos juntos pesan $3 + 5 + 6 = 14$. Por lo tanto el peso de un círculo, un cuadrado y un triángulo juntos es $\frac{14}{2} = 7$. Así que la respuesta correcta es la c).

Problema 5. Pardo quiere colorear las cuatro regiones del cuadrilátero de azul, rojo y verde, de manera que dos regiones que se tocan tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 9

Solución Empecemos con una de las regiones triangulares, cualquier color que pongamos ahí tendrá que ser igual al color que pongamos en la otra región triangular. Lo anterior se debe a que las dos regiones triangulares no se tocan, pero ambas tocan a las otras dos regiones. Hay tres formas de elegir el color de las dos regiones triangulares, y por cada de esas formas hay dos formas de poner los colores de adentro. Entonces hay $3 \cdot 2 = 6$ formas, por lo que la respuesta correcta es la b).

Problema 6. ¿Cuántas de las siguientes figuras forman un cubo al doblarse adecuadamente por las líneas punteadas?



a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

Solución. La cuarta figura es la unica que al doblarse no forma un cubo, por lo que hay cuatro figuras que sí forman un cubo, por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 7. La potencia cuarta de un entero es un número de tres dígitos. Si se sabe que el dígito de las decenas es impar, ¿cuánto vale el dígito de las unidades?

a) 1 b) 2 c) 5 d) 6

Solción. Llememos n al número que estamos buscando. Notemos que $3 < n < 6$, pues $3^4 = 81$ y $6^4 = 36^2 = 1296$, así que la potencia cuarta de cualquier número mayor a 5 tiene más de 3 dígitos mientras que la potencia cuarta de un número menor que 4 tiene menos de tres dígitos. Esto limita las opciones a $n = 4$ o $n = 5$.

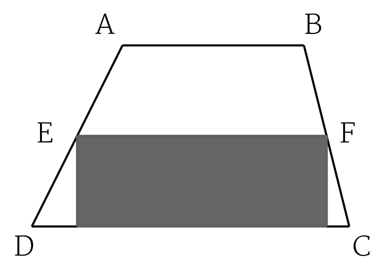
Observemos que $4^4 = 256$ y $5^4 = 625$, por lo que el único número que cumple las condiciones del probema es 4^4. Como el dígito de las unidades de 256 es 6, la respuesta correcta es la c).

Problema 8. El joven Fernández compró 12 flores para obsequiarles a su novia y a sus 4 amigas. Si a cada amiga le da al menos una flor y a su novia le da más flores que a cualquier otra, ¿cuál es le mínimo número de flores que le da a su novia?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

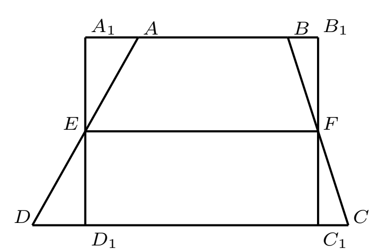
Solución. Si el joven Fernández le diera 3 flores o menos a su novia, significa que repartió 9 flores entre sus 4 amigas. Entonces al menos una de ellas recibiría por lo menos 3, ya que $2 \cdot 4 = 8 < 9$. Si le da 4 flores a su novia y dos a cada amiga se cumple que todas reciben flor y su novia recibe más que las demás. Por lo tanto el mínimo es 4 y la respuesta correcta es la b).

Problema 9. Calcula el área del trapecio $ABCD$ si el área de la figura sombreada es 10 y E y F son puntos medios de AC y BD respectivamente.



a) 16 b) $\frac{31}{2}$ c) 20 d) $\frac{37}{2}$

Solución. Dibujamos A_1, B_1, C_1 y D_1 de manera que tanto A_1, E y D_1 como B_1, F y C_1 estén sobre una línea. Notemos que como E y F son puntos medios, entonces EF es paralela a AB. Debido a que las rectas AB y DC son paralelas, el ángulo $\angle A_1AE$ es igual al ángulo $\angle EDD_1$, por la misma razón tenemos $\angle AA_1E = \angle DD_1E$ y $\angle D_1ED = \angle AEA_1$, así que los triangulos $\triangle AEA_1$ y $\triangle DED_1$ tienen los mismos angulos y un lado correspondiente mide lo mismo (AE = ED), entonces estos triangulos son congruentes, y por lo tanto tienen la misma área.
De una manera análoga podemos concluir que los triángulos $\triangle BB_1F$ y $\triangle C_1FC$ tienen la misma área. Así podemos calcular el área del trapecio calculando el área del rectángulo $A_1B_1C_1D_1$ y debido a que $A_1E = ED_1$, los rectangulos A_1EFB_1 ,ED_1C_1F tienen la misma área que es igual a 10 . Así el área del trapecio $ABCD$ es 20. Es decir, la respuesta correcta es la c).

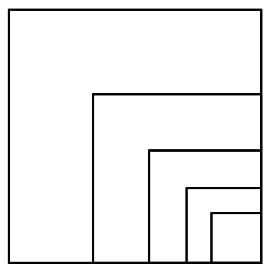


Problema 10. En una clase de gimnasia hay en total entre 50 y 100 chicos. Para realizar las actividades, el profesor los divide siempre en equipos de 3, de 5 o de 9. Al hacer alguna de estas divisiones, cuando no hay ausentes, siempre sobra un chico. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

a) 55 b) 81 c) 90 d) 91

Solución. Quitemos a uno de los chicos, al hacer esto la cantidad de chicos que quedan es múltiplo de 3, de 5 y de 9. Busquemos información sobre los números que son múltiplos de 3, de 5 y de 9 simultaneamente.
Notemos que todos los números múltiplos de 9 son también múltiplos de 3, así que nos bastará investigar a los números que sean múltilpos de 5 y de 9 al mismo tiempo. Ahora, si un número es múltiplo de 5 y de 9, entonces es múltiplo de 45. Como el único múltilpo de 45 entre 50 y 100 es el 90, podemos concluir que al quitar un chico quedan 90 chicos en la clase.
Por lo tanto hay 91 chicos en la clase y la respuesta correcta es la d).

Problema 11. En el dibujo se muestran 5 cuadrados ordenados de mayor a menor, el lado de cada uno mide $\frac{2}{3}$ del lado anterior. Si el lado mayor mide $81cm$ y se quieren cubrir todas las lineas negras con cinta azul. ¿Cuánta cinta se necesita?



a) 211cm b) 422cm c) 584cm d) 844cm

Solución. Primero observemos que el perímetro del cuadrado mayor es igual a la suma de sus cuatro lados, es decir, $p_1 = 4 \cdot 81 = 324$. Ahora notemos que el resto de las líneas negras son 2 lados de cada uno de los demás cuadrados. Usando la información que nos dan, calculemos cuánto miden los lados de los 4 cuadrados más chicos, para esto llamemos $l_1 > l_2 > l_3 > l_4 > l_5$ a las longitudes de los lados de los 5 cuadrados.

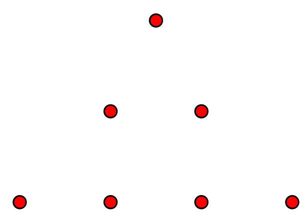
$$
\begin{aligned}
l_2 = l_1 \cdot \frac{2}{3} &= 81 \cdot \frac{2}{3} = 54 \\
l_3 = l_2 \cdot \frac{2}{3} &= 54 \cdot \frac{2}{3} = 36 \\
l_4 = l_3 \cdot \frac{2}{3} &= 36 \cdot \frac{2}{3} = 24 \\
l_5 = l_4 \cdot \frac{2}{3} &= 24 \cdot \frac{2}{3} = 16
\end{aligned}
$$

Por lo tanto necesitaremos $p_1 + 2(l_2 + l_3 + l_4 + l_5) = 324 + 2(54 + 36 + 24 + 16) = 324 + 2 \cdot 130 = 584$cm de cinta. Por lo que la respuesta correcta es la c).

Problema 12. Se quiere trazar un triángulo cuyos vérices sean tres de los puntos de la figura y tal que uno de sus lados sea horizontal. ¿Cuántos triángulos se pueden trazar?

a) 16 b) 19 c) 23 d) 27

Solución. Clasifiquemos a los triángulo de acuerdo a su lado horizontal.



- Contemos la cantidad de triángulos con lado horizontal en la primera fila. Como en la primera fila hay 4 puntos, hay 6 formas de escoger una pareja de ellos, la cual determinará el lado horizaontal del triángulo. Luego, para cada pareja escogida hay tres puntos en las otras filas con las cuales se pueden formar tres triángulos. Por lo tanto la cantidad de triángulos en este caso son $3 \cdot 6 = 18$.
- Ahora contemos cuántos triángulos hay con lado horizontal en la segunda fila. Como solo hay dos puntos en la segunda fila, el lado horizontal del triángulo está determinado. Como tercer vértice podemos escoger cualquiera de los otros 5, con lo cual se formarán 5 triángulos distintos. Por lo tanto la cantidad de triángulos en este caso es 5.
- Como solo hay un punto en la tercera fila no hay triángulps cuyo lado horizontal esté en la tercer fila.

Por lo tanto, en total hay $18 + 5 = 23$ triángulos y la respuesta correcta es la c).

Problema 13. En la figura cada rectángulo tiene escrito su perímetro. ¿Cuánto vale el perímetro del rectángulo sombreado?

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{5}{2}$

Solución. El perímetro de cualquier rectángulo con lados de longitudes x, y es $2x + 2y$. Ahora, nombremos los lados de los rectángulos del dibujo. Si nos fijamos, solo tenemos que nombrar 4 lados, pues los rectángulos comparten lados. Llamemos a los lados del rectángulo de perímetro 1, a y b; a los del rectángulo superior de perímetro 2, a y c; a los del rectángulo inferior de perímetro 2, b y d. Así, el rectángulo sombreado tiene lados c y d. Con esta información obtenemos las siguientes ecuaciones $2a + 2b = 1$,$2a + 2c = 2$, $2b + 2d = 2$.
De las ecuaciones anteriores obtenemos que:

$$2c + 2d = (2c + 2d) + (2a + 2b) - (2a + 2b) = (2a + 2c) + (2b + 2d) - (2a + 2b) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 14. Los números A y B son dos números enteros diferentes escogidos entre 1,2,3...,40. ¿Cuál es el mayor valor que puede alcanzar la siguiente expresión?

$$\frac{AB}{A-B}-(A+B)$$

a) 1481 b) 1520 c) 1559 d) 1560

Solución. Veremos que la expresión se maximiza cuando $A=40$ y $B=39$, asumiendo el valor de

$$\frac{40\cdot 39}{40-39}-(40+39)=1481$$

Como lo más grandes que podemos escoger a A y B es 40 y 39 en algún orden, tenemos que $AB\leq 39\cdot 40=1560$. Ahora, si $A-B$ es negativo, el número que obtendríamos sería negativo y no alcanzarámos el máximo, por lo que $A-B>0$.

Observemos que si $A-B\geq 2$ entonces $\frac{AB}{A-B}$ es igual o menos de la mitad de AB, y como $AB\leq 1560$ tendríamos que $\frac{AB}{A-B}$ a lo más podría ser $\frac{1560}{2}=780$, que es menor al valor que propusimos como máximo, por lo tanto $A-B<2$, y como $A-B>0$ entonces $A-B=1$, es decir, $B=A+1$. Con lo que ya sabemos el problema se reduce a encontrar el máximo valor de $A(A-1)-(A+(A-1))=A^2-3A+1=A(A-3)+1$ lo cual es equivalente a encontrar el máximo valor de $A(A-3)$, de donde es claro que la expresión se maximiza cuando A es lo más grande posible, es decir cuando $A=40$ y cuando $B=A-1=39$.
Por lo tanto la respuesta correcta es la a).

Problema 15. El Reforma, La Jornada y el Universal cubren una carrera de caballos en donde hubo únicamente 3 participantes: Lykos, Ferenic y Pasacas. Cada periódico reportó una verdad y una mentira sobre la carrera. El Reforma dijo: el ganador no fue Lykos; el ganador no fue Ferenic. La Jornada dijo: Ferenic llegó en último; Lykos llegó antes que Pasacas. El Universal dijo: Ferenic llegó antes que Pasacas; Pasacas llegó antes que Lykos. ¿En qué órden llegaron?

a) Ferenic, Pasacas, Lykos b) Lykos, Pasacas, Ferenic c) Pasacas, Lykos, Ferenic d) No hay suficiente información para decidir.

Solución. La respuesta correcta en éste caso es la "d", es decir, no hay suficiente información para decidir.

Para ver que ésto es correcto veremos que hay dos esquemas de llegada que nos funcionan como solución:

- 1- Ferenic 2- Lykos 3- Pasacas

  Vamos a considerar que la afirmación del Reforma que es verdadera es *"el ganador no fue Lycos"*, con lo que en automático, es falsa la afirmación *"el ganador no fue Ferenic"* por lo cual sabemos que, de hecho, *el ganador fue Ferenic*.

Como sabemos que *el ganador fue Ferenic* la afirmación de La Jornada *“Ferenic llegó en último"* debe ser falsa y entonces su afirmacion que es cierta es *“Lycos llegó antes que Pasacas"*.

Para El Universal tenemos que la veracidad de *“Lycos llegó antes que Pasacas"* nos forza a que la afirmación *“Pasacas llegó antes que Lycos"* sea falsa, por lo que forzosamente deberá ser cierto que *“Ferenic llegó antes que Pasacas"*.

Podemos ver que las afirmaciónes y negaciones escogidas son ciertas en el esquema de lugares que dimos; además, al suponer cierto *“el ganador no fue Lycos"* condicionamos cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales son falsas.

- 1- Lycos 2- Ferenic 3- Pasacas

  Al igual que en el caso anterior veremos que suponiendo una de las afirmaciones cierta se condicionaran las demás. En éste caso consideraremos que la afirmación verdadera de El Reforma es *“el ganador no fue Ferenic"* y la falsa es *“el ganador no fue Lycos"*; con ésto sabemos que *el ganador fue Lycos*.

  De lo último tenemos que, para La Jornada, debe ser cierto *“Lycos llegó antes que Pasacas"* y por lo tanto es falso que *“Ferenic llegó en último"*; de ésto sabemos que *Ferenic no llegó en último*.

  Utilizando que *el ganador fue Lycos* y que *Ferenic no llegó en último* podemos definir los lugares que debieron ocupar los participantes tal y como lo hicimos en nuestro esquema de llegadas. Resta ver que para ésta configuración se pueda elegir una afirmación verdadera y una falsa de El Universal.

  Por ser cierto (de La Jornada) que *“Lycos llegó antes que Pasacas"* entonces es falso que *“Pasacas llegó antes que Lycos"*; finalmente es cierto que *“Ferenic llegó antes que Pasacas"*, lo cual nos dice que el esquema propuesto también resulto posible.

Al haber dos posibles esquemas de llegada se concluye que no tenemos suficiente información para decidir.