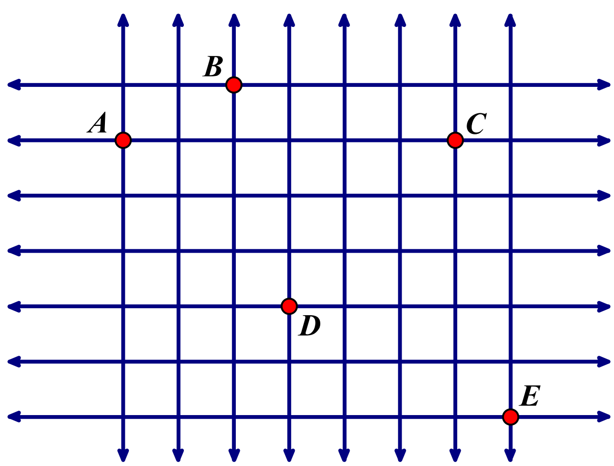
Concurso de Secundaria 2014–2015
Primera etapa

Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal

Soluciones a la Primera Etapa del Nivel III

Problema 1. En una ciudad hay cinco museos, llamémoslos A, B, C, D y E. El turista Gerardo visita cada uno de los museos una sola vez. Comienza el día en el museo D y de ahí en adelante visita, de entre los museos que no ha visitado aún, aquel que esté a menos cuadras del que se encuentra en ese momento. ¿En qué orden visita los cinco museos?



a) $DBACE$ b) $DABCE$ c) $DBAEC$ d) $DCBAE$

Solución. Comenzando en D el punto A está a 6 cuadras, B está a 5, C a 6 y E a 6, por lo tanto Gerardo se mueve de D a B. Ya en el punto B es claro que A es el que está a menos cuadras. Caminando a A, C queda a 6 cuadras mientras que E a 12, por lo que el siguiente museo en el recorrido es el C. Finalmente Gerardo visita el museo E. Por lo tanto la respuesta correcta es la a).

Problema 2. Definimos la operación $\odot$ como $a \odot b = 4a - b$. ¿Cuánto es $8 \odot 2$?

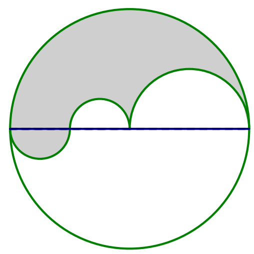
a) 0 b) 6 c) 30 d) 46

Solución. Utilizando la defnición tenemos

$$8 \odot 2 = 4 \cdot 8 - 2 = 30$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 3. Calcula el área sombreada de la siguiente figura formada por semicircunferencias de diámetros 1,1,2 y 4 respectivamente.



a) 2π b) $\frac{3}{2}\pi$ c) $\frac{15}{4}\pi$ d) 4π

Solución. Llamemos A al área de la mitad del círculo de diámetro 4, B el área de de la mitad del círculo de diámetro 2 y C el área de de la mitad del círculo de diámetro 1. Entonces tenemosque:

$$A = \frac{(2)^2\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$
$$B = \frac{(1)^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$$

Observemos que el área sombreada es la mitad superior del círculo de diámetro 4 menos la mitad del círculo de diámetro 2, la mitad del círculo de diámetro 1, más la mitad del círculo de diámetro 1, es decir :

$$A - B - C + C = A - B = 2\pi - \frac{1}{2}\pi = (2 - \frac{1}{2})\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Por lo tanto la respuesta correcta es b).

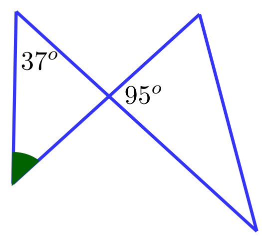
Problema 4. Se tienen dos tableros con 72 lámparas cada uno. El primero tiene todas las lámparas encendidas, el segundo, las tiene apagadas. Cada vez que se apagan 6 lámparas del primero, se encienden 3 lámparas del segundo. Esta operación se repite hasta que los dos tableros tengan igual número de lámparas encendidas. Al final, ¿cuántas lámparas quedan encendidas en cada tablero?

a) 12 b) 24 c) 36 d) 48

Solución. Al restar focos encendidos al primer tablero, estamos sumando focos encendidos al segundo tablero. Después de la primera operación hay $72-6$ focos encendidos del primer tablero, mientras que hay 3 focos encendidos en el segundo tablero. Al hacer dos veces la opercación

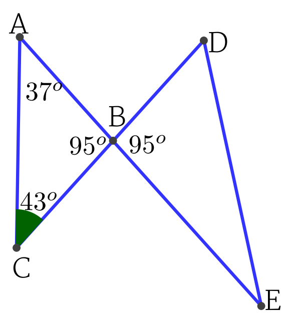
tendremos $72 - (6 \times 2)$ focos encendidos en el primer tablero y 3×2 en el segundo. Así después de realizar la operación n veces, habrá $72 - 6n$ focos encendidos en el primer tablero, mientras que en el segundo tablero habrá $3n$. Como buscamos que sean la misma cantidad, se debe de cumplir Ãa ecuación $72 - 6n = 3n$, de la cual se deduce $n = 8$. Como en la n-ésima modificacón hay $3n$ focos en el segundo tablero y después de 8 de estas se llega a que hay la misma cantidad de focos en ambos, habrá $3 \cdot 8 = 24$ focos en ambos tableros.
Por lo tanto la respuesta correcta es b).

Problema 5. ¿Cuál es el valor del ángulo marcado en la siguiente figura?

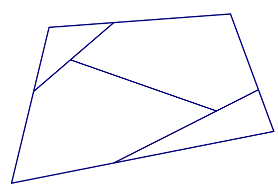


a) 37 b) 45 c) 48 d) 50

Solución. Nombremos los vértices como en la figura. Tenemos la igualdad de ángulos $\angle ABC = \angle DBE = 95^o$, ya que estos son opuestos por el vértice. Ahora, como la suma de ángulos internos de un triángulo es siempre 180^o, observando el triángulo ABC obtenemos que $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^o$, como $\angle CAB = 37^o$ y $\angle ABC = 95^o$ entonces $37^o + 95^o + \angle BCA = 180^o$, y por lo tanto $\angle ACB = 180^o - 95^o - 37^o = 43^o$, así que la respuesta correcta es la c).



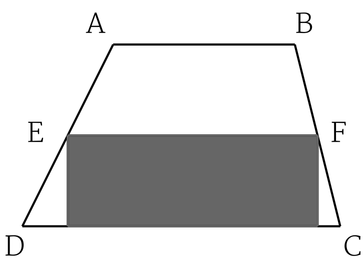
Problema 6. Pardo quiere colorear las cuatro regiones del cuadrilátero de azul, rojo y verde, de manera que dos regiones que se tocan tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo?



a) 4 b) 6 c) 8 d) 9

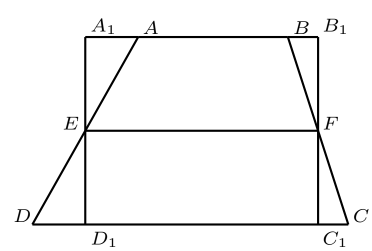
Solución Empecemos con una de las regiones triangulares, cualquier color que pongamos ahí tendrá que ser igual al color que pongamos en la otra región triangular. Lo anterior se debe a que las dos regiones triangulares no se tocan, pero ambas tocan a las otras dos regiones. Hay tres formas de elegir el color de las dos regiones triangulares, y por cada de esas formas hay dos formas de poner los colores de adentro. Entonces hay $3 \cdot 2 = 6$ formas, por lo que la respuesta correcta es la b).

Problema 7. Calcula el área del trapecio $ABCD$ si el área de la figura sombreada es 10 y E y F son puntos medios de AC y BD respectivamente.



a) 16 b) $\frac{31}{2}$ c) 20 d) $\frac{37}{2}$

Solución. Dibujamos A_1, B_1, C_1 y D_1 de manera que tanto A_1, E y D_1 como B_1, F y C_1 estén sobre una línea. Notemos que como E y F son puntos medios, entonces EF es paralela a AB. Debido a que las rectas AB y DC son paralelas, el ángulo $\angle A_1AE$ es igual al ángulo $\angle EDD_1$, por la misma razón tenemos $\angle AA_1E = \angle DD_1E$ y $\angle D_1ED = \angle AEA_1$, así que los triangulos $\triangle AEA_1$ y $\triangle DED_1$ tienen los mismos angulos y un lado correspondiente mide lo mismo ($AE = ED$), entonces estos triangulos son congruentes, y por lo tanto tienen la misma área.
De una manera análoga podemos concluir que los triángulos $\triangle BB_1F$ y $\triangle C_1FC$ tienen la misma área. Así podemos calcular el área del trapecio calculando el área del rectángulo $A_1B_1C_1D_1$ y debido a que $A_1E = ED_1$, los rectangulos A_1EFB_1 ,ED_1C_1F tienen la misma área que es igual a 10 . Así el área del trapecio $ABCD$ es 20. Es decir, la respuesta correcta es la c).

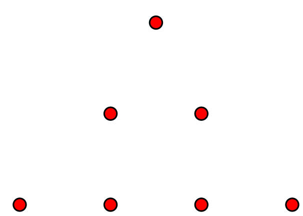


Problema 8. El número N tiene el aspecto $N = 3a42b$, con a y b dígitos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a y b para que N sea divisible por 2 y por 3?

a) 10 b) 15 c) 17 d) 20

Solución. Para que N sea divisible por 2 necesitamos que termine en un dígito par, es decir, $b = 0, 2, 4, 6$ u 8. Además, para que sea divisible por 3 necesitamos que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3, es decir, $3 + a + 4 + 2 + b = 9 + a + b$ debe ser múltiplo de 3. Como 9 es múltiplo de 3 entonces $a + b$ también debe de serlo.
Ahora, para cada elección de b veamos de cuántas maneras podemos escoger a a. Si $b = 0$, a puede ser $0, 3, 6, 9$. Si $b = 2$, a puede ser $1, 4, 7$. Si $b = 4$, a puede ser $2, 5, 8$. Si $b = 6$, a puede ser $0, 3, 6, 9$. Si $b = 8$, a puede ser $1, 4, 7$.
Por lo que tenemos $4 + 3 + 3 + 4 + 3 = 17$ maneras de escoger a y b para que N sea múltiplo de 2 y de 3.
Por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 9. Se quiere trazar un triángulo cuyos vérices sean tres de los puntos de la figura y tal que uno de sus lados sea horizontal. ¿Cuántos triángulos se pueden trazar?



a) 16 b) 19 c) 23 d) 27

Solución. Clasifiquemos a los triángulo de acuerdo a su lado horizontal.

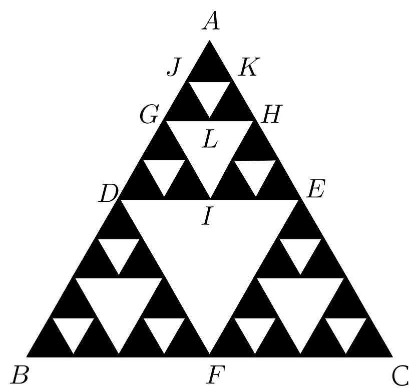
- Contemos la cantidad de triángulos con lado horizontal en la primera fila. Como en la primera fila hay 4 puntos, hay 6 formas de escoger una pareja de ellos, la cual determinará el lado horizaontal del triángulo. Luego, para cada pareja escogida hay tres puntos en las otras filas con las cuales se pueden formar tres triángulos. Por lo tanto la cantidad de triángulos en este caso son $3 \cdot 6 = 18$.
- Ahora contemos cuántos triángulos hay con lado horizontal en la segunda fila. Como solo hay dos puntos en la segunda fila, el lado horizontal del triángulo está determinado. Como tercer vértice podemos escoger cualquiera de los otros 5, con lo cual se formarán 5 triángulos distintos. Por lo tanto la cantidad de triángulos en este caso es 5.
- Como solo hay un punto en la tercera fila no hay triángulps cuyo lado horizontal esté en la tercer fila.

Por lo tanto, en total hay $18 + 5 = 23$ triángulos y la respuesta correcta es la c).

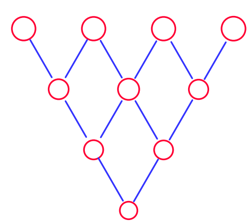
Problema 10. La siguiente figura está formada por triángulos equiláteros. Si el área del triángulo más grande es 1. ¿Cuánto mide el área sombreada?

a) $\frac{27}{64}$ b) $\frac{27}{16}$ c) $\frac{6}{8}$ d) $\frac{15}{16}$

Solución Cada uno de los triángulos ADE, DBF y EFC comparten un lado con el triángulo DFE y además los cuatro son equiláteros, entonces sus lados y ángulos son iguales, por lo que son triángulos congruentes y tienen la misma área. Por lo tanto, cada uno tiene área $\frac{1}{4}$ (la cuarta parte del tríangulo ABC). Haciendo el mismo análisis, podemos concluir que los triángulos AGH, GDI, HIE y GIH tienen respectivamente por área una cuarta parte del área del trángulo ADE, $\frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$. Por último, los triángulos AJK, JGL, KLH y JKL tiene área una cuarta parte del área del triángulo AGH, $\frac{\frac{1}{16}}{4} = \frac{1}{64}$. Así la región sombreada del triángulo AGH es $\frac{3}{64}$. Haciendo lo mismo en los triángulos GDI y HIE obtenemos que el área sombreada del tríangulo ADE es $\frac{9}{64}$. Lo mismo ocurre en los triángulos DBF yEFC, entonces el área sombreada de ABC es $\frac{27}{64}$. Por lo tanto la respuesta correcta es la b).



Problema 11. Jorge quiere llenar los círculos que se ven en la figura de forma que se cumpla que si se toma un círculo de las últimas tres filas, el número escrito en dicho círculo sea el máximo común divisor de los números escritos en los dos círculos que tiene arriba. Si en los cuatro círculos de la primera fila escribe los números 230, 30, 105 y 231 en ese orden, ¿qué número escribió en el círculo de hasta abajo?



a) 1 b) 3 c) 5 d) 10

Solución. Notemos que por la manera en que se llena el diagrama cualquier número en la primera fila (la fila de hasta arriba) es múltiplo de algún número en la tercera fila, cualquier

número en la segunda fila es múltiplo de algún número en la tercera fila, y finalmente cualquier número en la segunda fila es múltiplo del número de la cuarta fila.
Recordemos que si se tienen tres enteros a, b, c y se cumple que b es múltiplo de a y que c es múltilpo de b, entonces c es múltiplo de a. Con lo anterior y lo mencionado en el primer párrafo obtenemos que cualquier número en la primer fila es múltiplo del número de hasta abajo al cual llamaremos x.
Entonces x es divisor de 230 y de 231, como estos son números consecutivos podemos concluir que $x = 1$, y por lo tanto la respuesta correcta es la a).

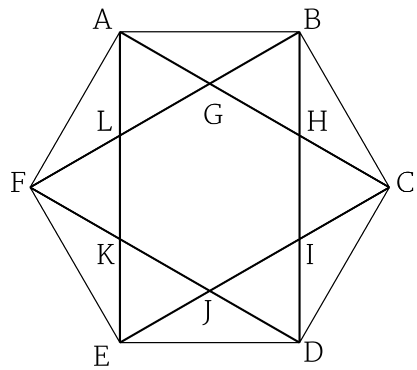
Problema 12. Mi mamá compra 8 rosas rojas todas las semanas y las reparte entre los 3 floreros de la casa. Un florero está en la sala, otro en el comedor y el otro en el dormitorio. ¿De cuántas formas diferentes puede distribuir las flores entre los floreros si quiere que todas las habitaciones tengan por lo menos una flor?

a) 16 b) 21 c) 24 d) 32

Solución. Dividamos el problema en casos, primero escogeremos cuántas flores irán en la sala, para cada una de esas elecciones escogeremos cuántas de las restantes irán en el comedor y con esto la cantidad de flores en el dormitorio quedará determinada.
El primer caso es cuando el florero de la sala tiene una flor, el segundo caso es cuando tiene dos flores y así sucesivamente hasta el sexto caso.
En el primer caso, el florero del comedor puede tener desde una hasta seis flores (si tuviera más flores entonces el florero del dormitorio se quedaría sin ninguna), y ya escoigada la cantidad de flores en el comedor en el dormitorio irán las restantes. Así podemos ver que hay seis formas de arreglar las 8 flores si se coloca una flor en el primer florero.
Los casos del 2 al 6 se pueden analizar de manera análoga. Cuando hay 2 flores en la sala hay 5 maneras de repartir las flores entre las otras habitaciones. De la misma forma, en el caso en el que hay 3 flores en la sala hay 4 formas de redistribuir las restantes.
Continuando de la misma manera en los otros casos podemos concluir que la cantidad de formas que hay para distribuir las flores en la casa es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Por lo tanto la respuesta correcta es la b).

NOTA: Esta operación se puede realizar utilizando la suma de Gauss para un problema en donde se consideren más flores (con la suma de Gauss nos referimos a la fórmula $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$).
El problema también se puede resolver con un método más avanzado de combinatoria conocido como “separadores".

Problema 13. La figura $ABCDEF$ es un hexágono regular. Calcula el valor del área del hexágono $ABCDEF$ entre el área del hexágono $GHIJKL$.



a) $\frac{4}{3}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{7}{2}$

Primero notamos que, por ser un hexágono regular, cualquiera de los triángulos $\triangle AGL$, $\triangle BHG$, $\triangle CIH$, $\triangle DJI$, $\triangle EKJ$, $\triangle FLK$ es equilátero y, de hecho, son todos congruentes entre si.
Trazemos las rectas GJ, LI y KH hasta que corten los lados del hexágono. Lamemos O al punto donde se cruzan las tres rectas anteriores y X al punto donde la recta GJ corta al segmento AB. Notemos dos cosas: Primero, los triángulos $\triangle LGO$, $\triangle GHO$, $\triangle HIO$, $\triangle IJO$, $\triangle JKO$, $\triangle KLO$ son todos equiláteros y congruentes entre ellos; además, los triángulos equiláteros $\triangle AGL$ y $\triangle LGO$ son congruentes por compartir el lado LG, con lo que todos los triángulos que hemos mencionado son congruentes (es decir, los triángulos $\triangle AGL$,$\triangle BHG$, ... , $\triangle FLK$, $\triangle LGO$, $\triangle GHO$, ... , $\triangle KLO$). Segundo, notando que el ángulo formado por AL y AB es recto (por ser una figura regular) y que la recta GX es paralela a AL, por ser $\triangle AGL$ un triángulo equilátero, el área de $\triangle AXG$ es exactamente la mitad que el área del $\triangle AGL$.
Finalmente bastara contar cuantas veces cabe el área del triángulo $\triangle AGL$ en las figuras que queremos comparar. Tenemos que el área de $ABCDEF$ es 18 veces el área de $\triangle AGL$ y que el área de $GHIJKL$ es 6 veces el área de $\triangle AGL$, por lo cual, el valor buscado es $\dfrac{18}{6} = 3$.
Por lo tanto la respuesta correcta es la c).

Problema 14. El Reforma, La Jornada y el Universal cubren una carrera de caballos en donde hubo únicamente 3 participantes: Lykos, Ferenic y Pasacas. Cada periódico reportó una verdad y una mentira sobre la carrera. El Reforma dijo: el ganador no fue Lykos; el ganador no fue Ferenic. La Jornada dijo: Ferenic llegó en último; Lykos llegó antes que Pasacas. El Universal dijo: Ferenic llegó antes que Pasacas; Pasacas llegó antes que Lykos. ¿En qué órden llegaron?

a) Ferenic, Pasacas, Lykos b) Lykos, Pasacas, Ferenic c) Pasacas, Lykos, Ferenic d) No hay suficiente información para decidir.

Solución. La respuesta correcta en éste caso es la “d", es decir, no hay suficiente información para decidir.

Para ver que ésto es correcto veremos que hay dos esquemas de llegada que nos funcionan como solución:

- 1- Ferenic 2- Lykos 3- Pasacas

  Vamos a considerar que la afirmación del Reforma que es verdadera es *"el ganador no fue Lycos"*, con lo que en automático, es falsa la afirmación *"el ganador no fue Ferenic"* por lo cual sabemos que, de hecho, *el ganador fue Ferenic*.

  Como sabemos que *el ganador fue Ferenic* la afirmación de La Jornada *"Ferenic llegó en último"* debe ser falsa y entonces su afirmacion que es cierta es *"Lycos llegó antes que Pasacas"*.

  Para El Universal tenemos que la veracidad de *"Lycos llegó antes que Pasacas"* nos forza a que la afirmación *"Pasacas llegó antes que Lycos"* sea falsa, por lo que forzosamente deberá ser cierto que *"Ferenic llegó antes que Pasacas"*.

  Podemos ver que las afirmaciónes y negaciones escogidas son ciertas en el esquema de lugares que dimos; además, al suponer cierto *"el ganador no fue Lycos"* condicionamos cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales son falsas.

- 1- Lycos 2- Ferenic 3- Pasacas

  Al igual que en el caso anterior veremos que suponiendo una de las afirmaciones cierta se condicionaran las demás. En éste caso consideraremos que la afirmación verdadera de El Reforma es *"el ganador no fue Ferenic"* y la falsa es *"el ganador no fue Lycos"*; con ésto sabemos que *el ganador fue Lycos*.

  De lo último tenemos que, para La Jornada, debe ser cierto *"Lycos llegó antes que Pasacas"* y por lo tanto es falso que *"Ferenic llegó en último"*; de ésto sabemos que *Ferenic no llegó en último*.

  Utilizando que *el ganador fue Lycos* y que *Ferenic no llegó en último* podemos definir los lugares que debieron ocupar los participantes tal y como lo hicimos en nuestro esquema de llegadas. Resta ver que para ésta configuración se pueda elegir una afirmación verdadera y una falsa de El Universal.

  Por ser cierto (de La Jornada) que *"Lycos llegó antes que Pasacas"* entonces es falso que *"Pasacas llegó antes que Lycos"*; finalmente es cierto que *"Ferenic llegó antes que Pasacas"*, lo cual nos dice que el esquema propuesto también resulto posible.

Al haber dos posibles esquemas de llegada se concluye que no tenemos suficiente información para decidir.

Problema 15. Los habitantes de maximilandia tienen una multiplicación distinta llamada "caja" (en vez de decir "multipliquemos estos números", dicen, "cajeemos estos números"). El símbolo que usan es $\square$ y la operación entre x y y se define como $x \square y = |x - y| + x + y$. Marcos calcula $1 \square 2$, al resultado, lo cajea con 3, al resultado lo cajea con 4 y así sucesivamente hasta cajear con 2014. ¿Cuál es el último número que obtiene?

Solución. El primer cajeo que efectúa Marcos es

$$1 \square 2 = |1 - 2| + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Ya que el resultado del primer cajeo fue 4, el segundo cajeo que efectúa Marcos es

$$4\Box 3 = |4-3| + 4 + 3 = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Del mismo modo, ya que el resultado del segundo cajeo fue 8, el tercer cajeo que efectúa Marcos es

$$8\Box 4 = |8-4| + 8 + 4 = 4 + 8 + 4 = 16.$$

De efecuar los primeros 3 cajeos, tenemos que el resultado del cajeo número 1 fue 2^2, el del cajeo número 2 fue 2^3 y el del cajeo número 3 fue 2^4.
Notemos que si $x > y$, entonces $x-y > 0$, por lo que $|x-y| = x-y$. Con estas condiciones tenemos que

$$x\Box y = |x-y| + x + y = x - y + x + y = 2x.$$

Con esta última observación se pueden calcular los primeros tres cajeos más fácilmente. Para el cajeo número 1 tenemos que $2 > 1$, por lo que $1\Box 2 = 2 \times 2 = 2^2$. Dado que $2^2 > 2$, el cajeo número 2 es $2^2\Box 3 = 2 \times 2^2 = 2^3$, pues . Del mismo modo, dado que $2^3 > 4$, tenemos que el cajeo número 3 es $2^3\Box 4 = 2 \times 2^3 = 2^4$ y así sucesivamente.
En general se tiene que $2^n > n+1$, por lo que el cajeo número n será $2^n\Box(n+1) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Con esto se puede calcular el cajeo número 2013, en el cual Marcos cajeó el 2014, con el resultado del cajeo del paso anterior. Sustituyendo $n = 2013$ tenemos que el cajeo número 2013 que hizo Marcos es $2^{2013}\Box 2014 = 2 \times 2^{2013} = 2^{2014}$. Por lo tanto la respuesta correcta es la c).