Problemas Introductorios
Nivel 1

Material de apoyo para prepararse para los concursos de las Olimpiadas de Matemáticas en la Ciudad de México

Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal

Isabel Hubard Escalera

Instituto de Matemáticas, UNAM

Introducción

Los problemas que encontrarás en este folleto te ayudarán a prepararte para las primeras etapas de los concursos de primaria y secundaria.

Las primeras etapas de nuestros concursos son exámenes de opción múltiple y/o respuesta cerrada. En este folleto te presentamos los problemas que han aparecido en las primeras etapas de algunos exámenes de primaria y secundaria, pero sin las opciones de respuesta. Al final del documento están las soluciones a los problemas. Te recomendamos intentar cada uno de los problemas al menos una media hora antes de ver las soluciones.

Si acabas todos los problemas que te sugerimos aquí y quieres seguir preparándote, busca el folleto de problemas introductorios, nivel 2.

Te recordamos que cada año, la primera etapa de nuestro concurso de primaria y secundaria se lleva a cabo a principios del año escolar (generalmente en septiembre), mientras que la del concurso metropolitano (enfocado en alumnos de bachillerato) es en los primeros meses del año (generalmente en febrero) y puedes encontrar la convocatoria e información para inscribirte en

www.omdf.matem.unam.mx

Instituto de Matemáticas UNAM

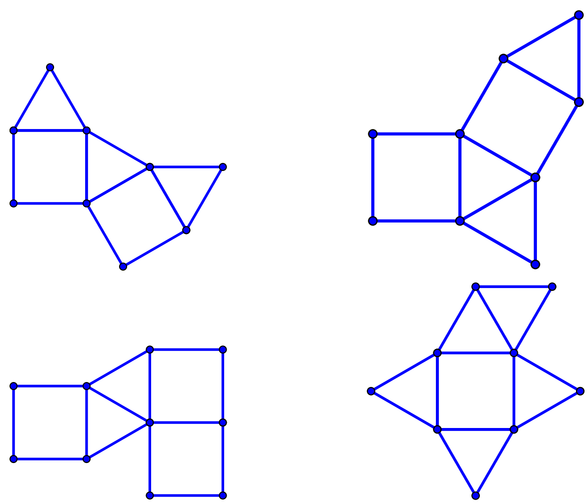
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

CAME CRÉDITO Y AHORRO A TU MEDIDA

Tecnológico Universitario del Valle de Chalco

Enunciados de los problemas

Problema 1. Cada una de las siguientes figuras está formada por cuadrados y triángulos equiláteros. ¿Cuál de las figuras tiene mayor perímetro?

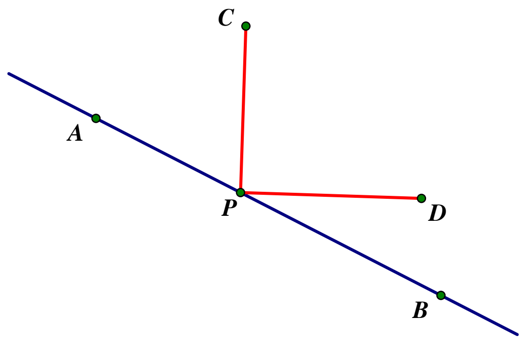


Problema 2. Félix tiene 4 playeras distintas. Quiere elegir 2 playeras para llevar de viaje. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Problema 3. ¿Qué número sigue en la sucesión $1, 2, 4, 7, 11, \ldots$?

Problema 4. En una escuela hay 615 alumnos y se les quiere regalar una paleta a cada uno. Si cada caja tiene 8 paquetes con 6 paletas cada una, ¿cuántas cajas hay que comprar?

Problema 5. En la figura de abajo, el ángulo $\angle CPD$ es recto. Si el ángulo $\angle CPA$ es tres veces el ángulo $\angle DPB$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle CPA$.



Problema 6. Ayer Sebastián dijo "el día después de pasado mañana es miércoles". Si se pasó por un día, ¿qué día es hoy?

Problema 7. Gerardo escribe 2015 números en el siguiente orden: primero el 1, después el 2, y así sucesivamente hasta el 10, luego vuelve a empezar desde el 1 hasta escribir 2015 números. ¿Cuál es el último número escrito por Gerardo?

Problema 8. Luis, Marcos y Gerardo son hermanos. Marcos es mayor que Gerardo y Luis es mayor que Marcos. Entonces:

a) Gerardo es menor que Luis.

b) Luis es menor que Gerardo.

c) Marcos es mayor que Luis.

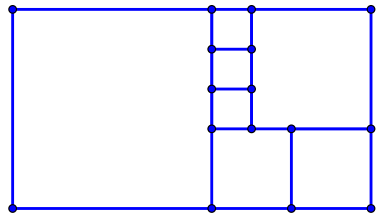
d) Marcos es el mayor de los tres

Problema 9. Ana Paula escribe todos los números de uno o dos dígitos que solo tienen al 2, al 3 y al 7 entre sus dígitos. ¿Cuántos números escribió Ana Paula?

Problema 10. Un rectángulo está dividido en 7 cuadrados como se muestra en la figura. Si el área del cuadrado menor es $1cm^2$, ¿cuál es el área de todo el rectángulo?

Problema 11. Félix tiene escrito en su cuaderno 3 números enteros. Cuando los multiplica el resultado que obtiene es un número impar, ¿cuántos de los números originales son impares?

Problema 12. Andrés se enfermó de la garganta y el doctor le mandó tomarse una cucharada de jarabe cada 4 horas. Le dijo que después de



tomarse 4 cucharadas se iba a sentir mejor. ¿Cuántas horas pasaron para que Andrés se sintiera mejor?

Problema 13. En un grupo el número de niños es 10 veces el número de niñas. Si se sabe que la cantidad total de alumnos (niños y niñas) es un número primo, ¿cuántos alunnos hay?

Problema 14. Un mago tiene en su sombrero 14 ratones grises, 8 blancos y 6 negros. ¿Cuál es el número mínimo de ratones que debe sacar del sombrero, sin mirar, para estar seguro de que saca al menos un ratón de cada color?

Problema 15. Un prisma que tiene 24 aristas, ¿cuántos vértices tiene?

Problema 16. Sea $ABCD$ un cuadrado y sean M, N, P y Q los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. ¿Cuál es la razón de el área del cuadrado $MNPQ$ área del cuadrado $ABCD$.

Problema 17. ¿Cuál es el menor número posible de hijos en una familia si cada hijo tiene al menos un hermano y una hermana?

Problema 18. Cierto número de garzas están paradas en unos postes en un jardín: una garza en cada poste. Pero una garza no tiene poste donde pararse. Más tarde las garzas se reacomodan y se paran en parejas en los postes y así un poste queda sin garza. ¿Cuántos postes hay en el jardín?

Problema 19. Tres niños se comen juntos 17 galletas. Alex come más galletas que cualquiera de los otros niños. ¿Cuál es el menor número de galletas que pudo comerse Alex?

Problema 20. Gerardo y Fernando son muy amigos. En su escuela les dejan tomar de 1 a 11 talleres. Si ninguno de los dos sabe cuáles talleres va a tomar el otro ¿Cuál es la mínima cantidad de talleres que cada uno debe tomar para garantizar que por lo menos estarán juntos en un taller?

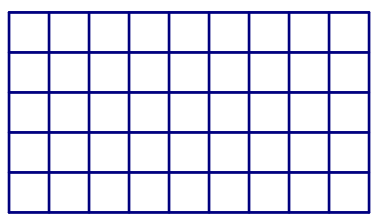
Problema 21. Desde una ciudad A parten trenes hacia una ciudad B. Por otro lado, desde B parte un tren hacia A cada hora a la hora exacta. En ambos casos el viaje dura 3 horas 45 minutos. Si uno toma el tren de A a B a las 12 en punto del mediodía, ¿cuántos trenes procedentes de B ve pasar durante el viaje?

Problema 22. Isabel escribe en el pizarrón todos los números de dos dígitos que cumplen que al invertir sus dígitos el número que resulta es estrictamente menor al original. ¿Cuántos números escribió Isabel?

Problema 23. Sobre una mesa se han puesto 5 monedas iguales, como se muestra en la figura. El área de cada círculo mide 1 cm^2. El área común entre dos círculos que están encimados es $\frac{1}{8}$ cm^2. ¿Cuál es la superficie de la mesa que está cubierta por las 5 monedas?

Problema 24. ¿Cuánto mide el ángulo agudo que forma el reloj a las 6:45?

Problema 25. Gustavo recorta los cuadraditos de la figura y arma con todos ellos el cuadrado más grande posible. ¿Cuántos cuadraditos sobran?



Problema 26. Oriol, Valeria y Paco tienen cada uno algo de dinero. La suma de lo que tienen Oriol y Valeria es $\$180$. La suma de lo que tienen Valeria y Paco es $\$210$. La suma de lo que tienen Oriol y Paco es $\$230$. ¿Cuánto dinero tiene Paco?

Problema 27. Pardo hará un viaje de 120km en su automóvil, el cual tiene 4 llantas puestas y una de refacción. Pardo rotó las llantas de forma que al final del viaje cada llanta se usó la misma distancia que las demás. ¿Cuántos km fue usada cada llanta?

Problema 28. Una pelota se coloca a una altura de 64 metros, si al soltar la pelota, esta rebota en el piso llegando hasta la mitad de la altura desde la que empezó a caer, la pelota no rebota para siempre, se queda estática en el momento en el que toca el suelo por quinta vez. ¿Cuántos metros recorrió la pelota?

Problema 29. Inés, Mara, Julio y Andrés tienen todos diferentes profesiones. En una reunión en donde estaban los cuatro, se sentaron en una mesa redonda. El diseñador estaba a la izquierda de Mara; el ingeniero enfrente de Julio; Inés y Andrés se sentaron juntos y una mujer se sentó al lado del profesor. ¿Quién es el ingeniero?

Problema 30. ¿Cuál es el último dígito de $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 2015$?

Problema 31. Aníbal y Beto están en el equipo de pingpong. Martín, Nicolás, Oscar y Pablo están en el equipo de tenis. Ramón, Santiago y Tomás están en el equipo de natación. Entre estos deportistas deben elegir un grupo de 5 para hacer un viaje. Si en el grupo debe haber por lo menos un representante de cada deporte, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerse la elección?

Problema 32. Hugo escribe repetidamente los tres números 2.2, 2.5 y 7.7 con las siguientes operaciones:

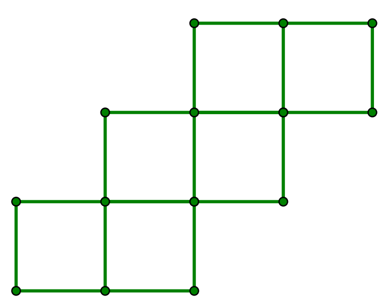
$$2.5+7.7-2.2 + 2.5 + 7.7-2.2 + 2.5 + 7.7-2.2 + \ldots$$

y así sucesivamente hasta completar 33 números. Si resuelve correctamente las operaciones, ¿qué número obtiene?

Problema 33. Ale escribe todos los números que cumplen estas condiciones: cada dígito sólo puede ser 1 ó 2; la suma de sus dígitos es igual a 8. ¿Cuántos números escribe Ale?

Problema 34. Encontrar todos los números pares de 4 dígitos en los cuales la suma de sus dígitos es 11 y el producto de sus dígitos es 20.

Problema 35. En la figura, todos los cuadritos son iguales y cada cuadrito tiene $4cm^2$ de área. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



Problema 36. Para premiar a los tres ganadores de un concurso de matemáticas, una pastelería regaló 7 latas llenas de galletas, 7 latas de

galletas llenas a la mitad y 7 latas vacías. ¿Cómo reparten el premio si a cada uno le tiene que tocar la misma cantidad de galletas y la misma cantidad de latas y no pueden vaciar las galletas de una lata a otra? (Todas las latas son iguales).

Problema 37. Chinney tiene 100 colores. Llama a Zeus para que le ayude a numerarlos del 1 al 100. ¿Cuántos nueves van a utilizar?

Problema 38. En un triángulo escaleno el lado mayor es igual a quince cuartos del lado menor, el lado restante es igual a trece cuartos del lado menor. El perímetro del triángulo es igual a 32 cm y la altura tomando como base el lado menor es de 6 cm. Encuentra el valor de cada lado del triángulo y calcula su área.

Problema 39. Jorge jugó 75 juegos contra su computadora y ganó 50 de ellos. Si quiere jugar en total 105 juegos y haber ganado el 60% de ellos, ¿cuántos juegos más tiene que ganar?

Problema 40. Hay tres cofres: A, B y C de manera que A está en el extremo izquierdo, B en el centro y C en el extremo derecho. En únicamente uno de los cofres hay un tesoro. Los cofres tienen escrito lo siguiente:
A. El tesoro está aquí.
B. El tesoro no está en este cofre.
C. El tesoro no está en el cofre del centro.
Si sólo uno de los letrero está mal, ¿dónde está el tesoro?

Problema 41. $ABCD$ es un rectángulo en el que el lado AB mide $20cm$. Si su perímetro es de $60cm$, ¿cuánto mide el lado BC?

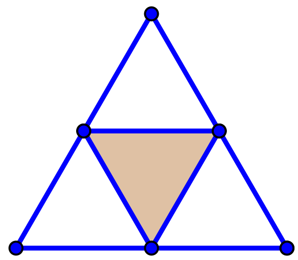
Problema 42. Cristina tiene 4 tarjetas y cada una de ellas tiene escrito un múltiplo de 5. Cuando Cristina multiplica los números de sus 4 tarjetas obtiene un número que termina en 5. ¿Cuántos de los números de las tarjetas son impares?

Problema 43. El triángulo de la figura está partido en 4 triángulos equiláteros iguales. Si uno de los lados del triángulo grande mide $12cm$, ¿cuál es el perímetro de la región sombreada?

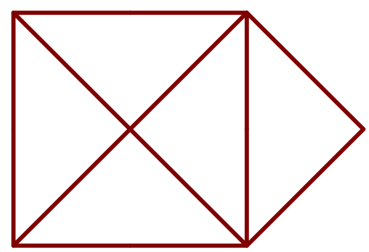
Problema 44. ¿Cuántos números de cinco dígitos son iguales cuando se voltean?

Problema 45. Saúl escribe en su cuaderno la siguiente lista de números $5, 12, 19, 26, 33, 40, \ldots$ ¿Cuáles de los siguientes números aparecerán en la lista?

$$2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016$$



Problema 46. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

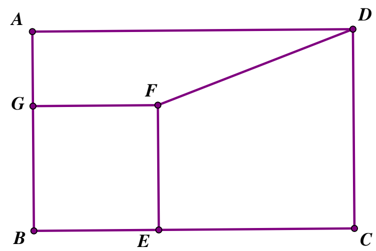


Problema 47. Fernanda tiene que ir a la tienda, a la escuela, al parque, a la gasolinería y a su casa. Lo importante es que solo tiene que ir una y solo una vez a cada lugar, primero tiene que ir a la escuela, al final tiene que ir a su casa. ¿De cuántas formas puede realizar sus trayectos?

Problema 48. Ayer tenía 18 años y el próximo año cumpliré 19 años. Si mañana es mi cumpleaños, ¿En que día y mes nací?

Problema 49. Felix tiene 4 playeras y 3 pantalones. Quiere elegir 2 playeras y 2 pantalones para llevar de viaje. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Problema 50. En la figura, $ABCD$ es un rectángulo con $AB = 7cm$ y $BC = 10cm$. Se traza el cuadrado $BEFG$ donde E es el punto medio de BC. Calcula el área del cuadrilátero $AGFD$



Soluciones de los Problemas

Solución 1. Todos los lados de todas las figuras tienen la misma longitud, por lo que la figura de mayor perímetro es la que más lados tenga. La de arriba a la izquierda tiene 9 lados, la de arriba a la derecha tiene 9 lados, la de abajo a la izquierda tiene 10 y la de abajo a la derecha tiene 9. Por lo tanto la de abajo a la izquierda es la de mayor perímetro.

Solución 2. Félix puede elegir de 4 formas la primera playera que llevarse. Para la segunda playera ya únicamente tiene 3 opciones. Pero si, por ejemplo, elige primero la roja y luego la azul, es lo mismo que si elige primero la azul y luego la roja, por lo que cada combinación de dos playeras la hemos contado 2 veces. Por lo tanto Félix puede elegir sus dos playeras de $\frac{4\times 3}{2} = 6$ formas distintas.

Solución 3. Notemos que entre el 1 y 2 la diferencia es 1, entre el 2 y 4 la diferencia es 2, entre el 4 y 7 la diferencia es 3, entre el 7 y 11 la diferencia es 4 por tanto ahora la diferencia entre el 11 y el siguiente debe ser 5. Entonces el siguiente número de la sucesión es 16.

Solución 4. En total necesitamos 615 paletas y cada caja tiene 8×6 = 48 paletas. Si dividimos 615 entre 48 obtenemos 12.81 por tanto son necesarias 13 cajas.

Solución 5. El ángulo llano $< BPA$ tiene una amplitud de 180^o, como el ángulo $\angle CPD$ es recto, la suma de los ángulos $\angle CPA + \angle DPB = 90$. Por las hipotesis del problema podemos escribir $\angle CPA$=3$\angle DPB$ entonces $3\angle DPB + \angle DPB = 4\angle DPB = 90$ de donde $\angle DPB$=$\frac{90}{4}$=22.5 por tanto $< \angle CPA$=3×22.5=67.5

Solución 6. Sebastián se paso por un día, por lo que la frase verdadera es "*pasado mañana es miercoles*". Para que esa frase sea cierta, debió ser pronunciada dos días antes del miércoles y por tanto la respuesta es *lunes*.

Solución 7. Cada vez que Gerardo escribe el número 10, después vuelve a empezar con el 1. Entonces escribe el número 10 al escribir el décimo número, el vigésimo número, y así sucesivamente. Es decir, cada vez que va en el n−ésimo número, con n un múltiplo de 10, Gerardo escribe el número 10. Entonces, cuando el número que escribe en el lugar 2010 es 10, por lo que el último número que escribe es el 5.

Solución 8. Podemos establecer las siguientes desigualdades

$$Marcos > Gerardo$$

y

$$Luis > Marcos$$

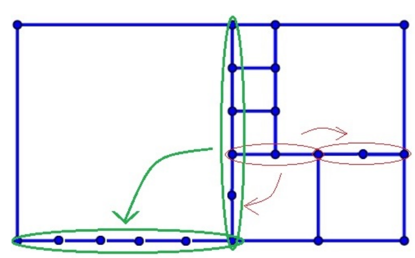
, entonces

$$Luis > Marcos > Gerardo$$

y la respuesta correcta es a.

Solución 9. Los números de un dígito que solamente ocupan al 2, 3 y 7 son ellos mismos, mientras que los de dos dígitos son $3 \times 3 = 9$ pues disponemos de 3 opciones para el dígito de las decenas y 3 opciones para el dígito de las unidades, la respuesta correcta es $3 + 9 = 12$

Solución 10. Al ser todos cuadrados sus lados miden lo mismo, dibujamos cuadrados pequeños para poder saber sus dimensiones



tiene 9 cuadritos de base y 5 de altura por tanto su área es $9 \times 5 = 45 cm^2$.

Solución 11. Cuando multiplicamos un número par por cualquier número entero, la respuesta siempre es un número par. Por lo tanto, si uno de los números es par, el resultado de ese número por los otros dos, es par. Entonces los 3 números deben de ser impares.

Solución 12. Andrés se tomó la segunda cucharada de jarabe 4 horas después de tomarse la primera. La tercera se la tomó 4 horas después de la segunda, es decir, $4+4=8$ horas después de la primera. Finalmente la cuarta se la tomó 4 horas después de la tercera, por lo que se la tomó $8+4=12$ horas después de la primera cucharada. Entonces tuvieron que pasar 12 horas para que Andrés se sintiera mejor.

Solución 13. Como hay 10 veces más niños que niñas, por cada ninã que hay en el grupo, hay $1 \times 10 = 10$ niños. Entonces, por cada niña que hay, tenemos 11 (1 niña y 10 niños) en el grupo. Es decir, podemos contar el número de alumnos en el grupo multiplicando el número de niñas por 11. Pero si el número total es primo, entonces el número de niñas tiene que ser 1 (de otra manera tendríamos que el número de alumnos es un múltiplo de 11 diferente a 11). Por lo tanto hay 11 alumnos en total.

Solución 14. Consideremos el peor de los casos donde al mago le salen primero todos los del color gris, luego todos los del color blanco, entonces en la siguiente elección le tiene que salir un negro, de esta forma tendrá al menos uno de cada color y necesitó sacar $14+8+1=23$ conejos.

Solución 15. En un prisma, dos de sus caras son algún polígono P y las demás son rectángulos. El número de aristas es 3 veces el número de vértices de P. Entonces el número de vértice de P es $\frac{24}{3} = 8$. Pero el prisma tiene dos veces el número de vértices que tiene P, por lo que tiene 16 vértices.

Solución 16. Trazando líneas auxiliares como se muestra en la figura, observamos que el cuadrado original, se parte en 8 triángulos rectángulos, de los cuales, 4 forman al cuadrado $MNPQ$, por tanto la razón es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Solución 17. Como cada hijo tienen un hermano y una hermana al menos uno de los hijos es una mujer, entonces ella tiene una hermana y ésta última tiene un hermano hombre y éste último tiene otro hermano hombre, lo cual da un total de 4 hermanos y por construcción es el mínimo número de hijos que cumple el problema.

Solución 18. Sea g el número de garzas y sea p el número de postes. Si cada garza se para en un poste una de las garzas se queda sin postes. Por lo que si se añade un poste cada garza está parada en un poste. Esto se traduce a $g = p + 1$. Ahora sabemos que si en cada poste se paran dos garzas entonces sobra un poste. Por lo que si quitamos ese poste sobrante hay 2 garzas por cada poste. Lo que nos dice que $\frac{g}{2} = p - 1$.
Ahora tenemos dos ecuaciones lineales de dos incognitas. Hay varias formas para resolver esto. Exhibimos una.
La ecuación $\frac{g}{2} = p - 1$ implica $g = 2p - 2$, ahora como estos son iguales podemos restar la ecuación $g = p + 1$ a la ecuación $g = 2p - 2$para obtener $0 = p - 3$. sumando 3 a los dos lados se obtiene $3 = p$ entonces por la ecuación $g = p + 1$ se obtiene $g = 3 + 1 = 4$. Luego $g = 4$ y $p = 3$.
Para comprobar el resultado se observa que cuando las cuatro garzas se paran cada una en un poste entonces una garza se queda sin un poste. Adicionalmente si las garzas se paran dos en cada poste entonces solo usan dos, por lo que uno sobra.

Solución 19. Notemos que si Alex come 6 o menos galletas entonces los 2 niños restantes tendrán que comer 11 o mas galletas entre los dos, lo que significa que habrá un niño que comerá 6 o más galletas, que es la misma o mayor cantidad de galletas que comió Alex. Entonces Alex debe comer mas de 6 galletas. Veamos que si Alex come 7 galletas, y los otros dos niños 5 cada uno entonces habran comido 17 galletas entre los 3 y los otros dos niños habrán comido una menor cantidad de galletas que Alex. Luego, Alex puede comer al menos 7 galletas.

Solución 20. Si Fernando y Gerardo tomaran cada uno 5 talleres, podría pasar que no estén juntos en un taller; esto puede suceder si Fernando está en 5 talleres distintos a los de Gerardo cubriendo así 10 de los 11 talleres posibles. En el caso de que cada uno tomó 6 talleres, forzosamente deben compartir un taller porque de lo contrario deberia haber al menos 6+6=12 talleres distintos (6 talleres que lleva Fernando y 6 talleres que lleva Gerardo), pero sólo hay 11 talleres, por lo tanto si cada uno toma 6 talleres en al menos uno irán ambos.

Solución 21. Notemos que el tren que parte del punto A se encontrará con todos los trenes del punto B que en algún momento se encuentren recorriendo su ruta mientras el tren del punto A también recorre su ruta. El tren del punto A llegará a su destino a las $15:45$, por lo que se encontrará con los trenes que salen de B a las 12, a la 1, a las 2 y a las 3, ya que a estas horas, el tren de A se encuentra recorriendo su ruta. Además es posible notar que los trenes que salen de B a las 9, a las 10 y a las 11 llegarán a la estación A a las $12:45$, $1:45$ y

$2:45$ respectivamente. Por lo que los pasajeros podrán ver un total de 7 trenes.

Solución 22. Los números que escribió Isabel son aquellos de dos dígitos cuyo dígito de las unidades es estrictamente menor que el dígito de las decenas. Es decir, los números $10, 20, 21,\ 30, 31, 32,\ 40, 41, 42, 43,$ $50, \ldots, 54,\ 60, \ldots, 65,\ 70, \ldots, 76,\ 80, \ldots, 87\ ,\ 90, \ldots 98$. En total son $1+2+\ldots+9 = 45$ números.

Solución 23. El área total de los 5 círculos es de 5 cm^2, pero se han traslapado 4 veces, así que la superficie de la mesa que está cubierta es de $5 - 4(\frac{1}{8}) = \frac{9}{2}$ cm^2.

Solución 24. La manecilla grande del reloj apunta a las 9. La manecilla chica ha avanzado $\frac{3}{4}$ de la distancia entre las 6 y las 7. Como el ángulo entre las 6 y las 7 es de 30^o, entonces el ángulo entre las 6 y la manecilla chica es de $\frac{45}{2}$. Es decir, el ángulo entre la manecilla chica y la grande es de $\frac{15}{2} + 2 \times 30$ grados. Por lo tanto el ángulo mide 82.5^o.

Solución 25. La figura tiene $9 \times 5 = 45$ cuadraditos. El cuadrado más grande que se puede hacer con ellos es el de 6×6 y usa 36 cuadraditos (pues para hacer el de 7×7 se necesitarían 49). Por lo tanto sobran $45 - 36 = 9$.

Solución 26. Llamemos O a la cantidad de dinero que tiene Oriol, V al de Valeria y P al de Paco. Entonces tenemos que $O + V = 180$ y $V + P = 210$. Eso quiere decir que Paco tiene $\$30$ más que Oriol, es decir $O + 30 = P$. Pero además nos dicen que $O + P = 230$. Entonces $230 = O + (O + 30) = 2 \times O + 30$, de donde podemos deducir que Oriol tiene $\$100$. Como Paco tiene $\$30$ más que Oriol, entonces Paco tiene $\$130$.

Solución 27. Como el viaje es de 120km y el coche tiene 4 llantas, entonces entre las 4 llantas recorrerán en total $120 \times 4 = 480$km. Como esos kilómetros se van a dividir de igual manera entre las 5 llantas, entonces cada una recorrió $\frac{480}{5} = 96$km.

Solución 28. De que se suelta la pelota a que toca el piso por primera vez la pelota recorre 64 metros. Sube hasta los $\frac{64}{2} = 32$ metros y vuelve a caer. Por lo que entre la primera y la segunda vez que toca el piso recorre $32 \times 2 = 64$ metros. Esta vez sube hasta los $\frac{32}{2} = 16$, lo que implica que entre la segunda y la tercera vez que toca el piso recorre 32 metros. De manera similar, entre la tercera y la cuarta vez que toca el piso recorre 16 metros, mientras que entre la cuarta y la quinta vez recorre 8 metros. Por lo tanto en total recorre $64+64+32+16+8=184$ metros.

Solución 29. Como a la izquierda de Mara está el diseñador y y enfrente de Julio está en ingeniero, entonces Julio no puede estar sentado a la derecha de Mara (pues el ingeniero y el diseñador estarían sentados en el mismo lugar). Entonces Julio está ya sea enfrene o a la izquierda de Mara. Como Inés y Andrés están sentados juntos, entonces Julio no puede estar enfrente de Mara. Por lo tanto Julio está sentado a la izquierda de Mara y es el diseñador. Además, Mara no es el ingeniero.

Ahora tenemos dos posibilidades, que el profesor sea Mara o que el profesor esté sentado enfrente de Mara. De cualquier manera, como hay una mujer al lado del profesor, entonces del lado derecho de Mara está sentada una mujer. Esto quiere decir que el ingeniero es Inés.

Solución 30. Como en $1\times3\times5\times\ldots\times2015$ está el 5, entonces el número es múltiplo de 5 por lo que su último dígito es 0 o 5. Sin embargo para que sea 0 el número debe de ser múltiplo de 10 y esto solo sucede cuando es múltiplo de 2. Dando que $1\times3\times5\times\ldots\times2015$ es multiplicación únicamente de números impares, entonces no es múltiplo de 2 y su último dígito es 5.

Solución 31. Hay varias opciones para los representantes del viaje:

- 2 de pingpong, 2 de tenis y 1 de natación.

  En este caso hay una sola opción para escoger a los de pingpong, $\frac{4\times3}{2}$ para escoger a los tenis y 3 opciones para escoger al de natación. Por lo tanto hay $1\times6\times3=18$ maneras de hacer la selección.

- 2 de pingpong, 1 de tenis y 2 de natación.

  Hay una sola opción para escoger a los de pingpong, 4 para escoger al de tenis y $\frac{3\times2}{2}$ opciones para escoger a los de natación. Por lo tanto hay $1\times4\times3=12$ maneras de hacer la selección.

- 1 de pingpong, 3 de tenis y 1 de natación.

  Hay 2 opciones para el de pingpong, 4 para los de tenis y 3 para el de natación. Hay $2\times4\times3=24$ opciones.

- 1 de pingpong, 2 de tenis y 2 de natación.

  Hay 2 opciones para el de pingpong, 6 para los de tenis y 3 para los de natación. Hay $2\times6\times3=36$ opciones.

- 1 de pingpong, 1 de tenis y 3 de natación.

  Hay 2 opciones para el de pingpong, 4 para el de tenis y 1 para los de natación. Hay $2 \times 4 \times 1 = 8$ opciones.

Por lo tanto en total hay $18 + 12 + 24 + 36 + 8 = 98$ formas de escoger la selección.

Solución 32. Como escribe 33 números, entonces escribe 11 veces $2.5 + 7.7 - 2.2$. Como $2.5 + 7.7 - 2.2 = 8$, entonces el número que obtiene es $11 \times 8 = 88$.

Solución 33. Como la suma de los dígitos es igual a 8 y no puede haber ceros entre los dígitos, el número tiene a lo más ocho dígitos. Por otra parte, como el dígito más grande que escribe es el 2, entonces el número tiene al menos 4 dígitos. Veamos la cantidad de número que escribe Ale que tengan:

- 4 dígitos. Todos los dígitos tienen que ser 2. El único número es el 2222.
- 5 dígitos. Hay tres dígitos 2 y dos dígitos 1. Las opciones son: $11222, 12122, 12212, 12221, 21122, 21212, 21221, 22112, 22121, 22211$. Hay 10 opciones.
- 6 dígitos. Hay dos dígitos 2 y cuatro dígitos 1. Hay $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ opciones.
- 7 dígitos. Hay un dígito 2 y seis dígitos 1. Hay 7 opciones.
- 8 dígitos. Todos los dígitos tienen que ser 1 y hay una única opción.

En total Ale escribió $1 + 10 + 15 + 7 + 1 = 34$ números.

Solución 34. Para que el producto de 4 dígitos sea 20, los dígitos deben de ser ya sea $1, 2, 2, 5$ o $1, 1, 4, 5$. En el primer caso, la suma de los números es 10, por lo que los números que queremos caen en el segundo caso. Como necesitamos que los números sean pares, entonces, el último dígito tiene que ser 4. Las únicas opciones son: 1154, 1514 y 5114.

Solución 35. Como el área de cada cuadrito es $4cm^2$, entonces el lado de cada cuadrito es de $\sqrt{4} = 2cm$. La figura tiene 14 lados de cuadritos en su perímetro, por lo tanto el perímetro de la figura es de $28cm$.

Solución 36. Como hay 21 latas, a cada ganador le deben de tocar 7 latas. Además, en total hay $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ de latas de galletas, por lo que a cada uno le tocan $\frac{7}{2}$ de latas de galletas. Entonces, a dos ganadores les damos 3 latas llenas de galletas, 1 lata llena a la mitad y 3 latas vacías. Al otro ganador le damos 1 lata llena, 5 latas llenas a la mitad y 1 lata vacía.

Solución 37. Van a utilizar un nueve al numerar cada uno de los siguientes números: $9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 90, 91, \ldots, 98$. Es decir, en 18 ocasiones utiliza un nueve. Además, al numerar el 99, utilizan dos nueves. Por lo tanto utilizan 20 nueves en total.

Solución 38. Llamemos a a la longitud del lado menor, c a la del lado mayor y b a la del otro lado. Entonces, $c = \frac{15}{4}a$ y $b = \frac{13}{4}a$. Ahora, el perímetro es $32 = a + b + c = a + \frac{15}{4}a + \frac{13}{4}a$. Es decir, $32 = 8 \times a$, de donde el lado menor mide 4cm, el lado mayor mide 15cm y el otro lado mide 13cm. Además, el área es $\frac{6\times4}{2} = 12$cm.

Solución 39. El 60% de 105 es 63. Por lo tanto tiene que ganar 13 juegos más.

Solución 40. Si el letrero del cofre A está mal, entonces los letreros de los cofres B y C deben estar ambos bien. Sin embargo esto no puede pasar, pues los letreros se contradicen: uno dice que el tesoro no está en B, mientras que el otro dice que sí está en B. Eso quiere decir que el letrero de A está bien y por lo tanto el tesoro está en A. (Esto también dice que el letrero de B está bien, mientras que el de C es el único que está mal).

Solución 41. Como $ABCD$ es un rectángulo, entonces $AB = CD = 20cm$ y $BC = AD$. Si el perímetro es $60cm$, entonces $AB+BC+CD+AD = 60cm$. Es decir, $20 + BC + 20 + BC = 60cm$, de donde $BC = 10cm$.

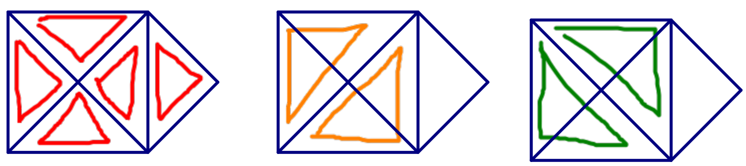
Solución 42. Un múltiplo de 5 termina en 5 o en 0. Además, termina en 0 siempre y cuando el número sea par, y termina en 5 si es impar. Como al multiplicar un número par por cualquier cosa el resultado siempre es par, entonces para que la multiplicación de las 4 tarjetas termine en 5 todos los números deben de ser impares.

Solución 43. Como los 4 triángulos son iguales y equiláteros, entonces el lado de uno de los triángulos pequeños es la mitad que el lado del triángulo grande. Es decir, cada lado del triángulo sombreado mide $6cm$ y por lo tanto su perímetro mide $18cm$.

Solución 44. Para que un número de cinco dígitos sea igual a él mismo cuando se voltea, entonces el primer y quinto dígito son iguales y el segundo y cuarto dígito son iguales. El primer dígito no puede ser 0, pues de otra manera el número tendría únicamente cuadro dígitos, por lo que hay 9 opciones para escoger el primer dígito. Para escoger el segundo dígito hay 10 opciones y para escoger el tercer dígito también hay 10 opciones. Los cuarto y quinto dígitos ya están determinados por el segundo y primer dígito, respectivamente. Por lo tanto hay $9 \times 10 \times 10 = 900$ maneras de que un número de cinco dígitos sea igual cuando se voltea.

Solución 45. Notemos que $5 = 0 \times 7 + 5$, $12 = 1 \times 7 + 5$, $19 = 2 \times 7 + 5$, ... Es decir, todos los números de la lista cumplen que son un múltiplo de 7 más 5. Ahora, como $\frac{2010}{7} = 287\frac{1}{7}$, entonces $2009 = 287 \times 7$, por lo tanto $287 \times 7 + 5 = 2014$ aparecerá en la lista.

Solución 46. Hay 9 triángulos, los que se muestran en las siguientes figuras.



Solución 47. Como primero va a la escuela y al final a su casa, entonces en el trayecto tiene que ir al parque, a la gas y a la tienda. Tiene 3 opciones para hacer la primera parada, por cada una de esas opciones, tiene 2 para la segunda y de esta manera la tercera parada será obligada (pues es el lugar al que le falta ir). Por lo tanto lo puede hacer de $3 \times 2 = 6$ maneras.

Solución 48. Como ayer tenía 18 años y mañana es mi cumpleaños, hoy también tengo 18 años. Entonces, mañana cumplo 19 años. Pero como cumplo 19 años el próximo año, mañana ya es el próximo año. Por lo que hoy es 31 de diciembre y mi cumpleaños es el 1 de enero.

Solución 49. Como lo vimos en el problema 2, las dos playeras las puede elegir de 6 maneras posibles. De la misma manera, tiene 3 maneras para elegir los 3 pantalones. Por lo tanto tiene $6 \times 3 = 18$ maneras de elegir la ropa que se llevará de viaje.

Solución 50. Si extendemos la línea EF y llamamos P a su intersección con el lado AD, entonces podemos dividir el cuadrilátero $AGFD$ en un rectángulo $APFG$ y un triángulo PDF. En el rectángulo $APFG$, el lado GF es el lado del cuadrado $BEFG$ que mide la mitad de BC, es decir, $GF = 5cm$. El lado GA es igual a $AB - BG = 7 - 5 = 2cm$. Entonces el área del rectángulo $APFG$ es igual a $5 \times 2 = 10cm^2$. De la misma manera $PD = 5cm$ y $PF = 2cm$ por lo que el área del triángulo PFD es igual a $\frac{5\times 2}{2} = 5cm^2$. Por lo tanto el área del cuadrilátero $AGFD$ es igual a $10 + 5 = 15cm^2$.

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en la Ciudad de México
Cubículo 214 del Instituto de Matemáticas de la UNAM
omdf@im.unam.mx
www.omdf.matem.unam.mx