Problemas Introductorios
Nivel 2

Material de apoyo para prepararse para los concursos de las Olimpiadas de Matemáticas en la Ciudad de México

Olimpiada de Matemáticas del Distrito Federal

Introducción

Los problemas que encontrarás en este folleto te ayudarán a prepararte para las primeras etapas de los concursos de primaria y secundaria.

Las primeras etapas de nuestros concursos son exámenes de opción múltiple y/o respuesta cerrada. En este folleto te presentamos los problemas que han aparecido en las primeras etapas de algunos exámenes de secundaria, pero sin las opciones de respuesta. Te recomendamos que antes de intentar estos problemas, trabajes en los Problemas introductorios de nivel 1, sin importar tu grado escolar. Cuando los acabes, regresa a trabajar en estos. Al final del documento están las soluciones a los problemas. Te recomendamos intentar cada uno de los problemas al menos una media hora antes de ver las soluciones.

Si acabas todos los problemas que te sugerimos aquí y quieres seguir preparándote, busca el folleto de problemas introductorios, nivel 3.

Te recordamos que cada año, la primera etapa de nuestro concurso de primaria y secundaria se lleva a cabo a principios del año escolar (generalmente en septiembre), mientras que la del concurso metropolitano (enfocado en alumnos de bachillerato) es en los primeros meses del año (generalmente en febrero) y puedes encontrar la convocatoria e información para inscribirte en

www.omdf.matem.unam.mx

Instituto de Matemáticas UNAM

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

CAME CRÉDITO Y AHORRO A TU MEDIDA

Tecnológico Universitario del Valle de Chalco

Enunciados de los problemas

Problema 1. Escribe los números enteros del 0 al 9 alrededor de una circunferencia de menor a mayor, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Después resta 1 a cada número impar y suma 1 a cada número par (el 0 es par). Escoge 3 lugares consecutivos alrededor de la circunferencia que obtuviste, ¿cuál es la mayor suma que puedes obtener?

Problema 2. Considera un rectángulo $ABCD$ al que en el lado BC le pegamos externamente un cuadrado $BCEF$ que tiene perímetro $36cm$. Si $AB = 2BF$, ¿cuál es el área del rectángulo $AFED$?

Problema 3. Gerardo y Félix hicieron un extraño acuerdo. Gerardo miente los miércoles, jueves y viernes, pero dice la verdad el resto de la semana. Félix miente los domingos, lunes y martes, pero dice la verdad en todos los otros días. Cierto día ambos dijeron: "Mañana es día de mentir", ¿en que día de la semana dijeron esto?

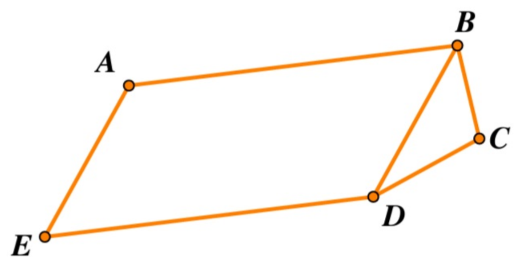
Problema 4. Utilizando solo los dígitos 1, 3, 6 y 8, ¿cuántos números de 4 cifras distintas hay?

Problema 5. En el auditorio de una universidad hay 101 asientos consecutivos, ¿cuál es el mínimo número de personas que se pueden sentar en alguno de los asientos de tal forma que si una nueva persona llega tiene que quedar al lado de alguna de las que ya estaban sentados?

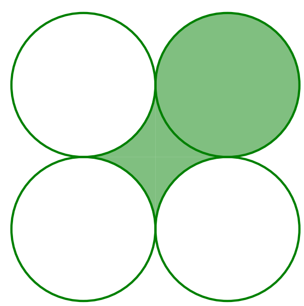
Problema 6. Hay 5 peces en un círculo y se numeran en orden P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. Un movimiento consiste en que el pez P_1 cambia de lugar con el pez que está inmediatamente a la derecha del pez vecino por la derecha a P_1. ¿Después de cuántos movimientos se vuelve al acomodo inicial, con los mismos lugares en los que empezaron?

Problema 7. Dani escribe todos los números pares entre 3 y 51. En total, ¿cuántos números escribe?

Problema 8. ¿Cuál es el perímetro del pentágono $ABCDE$ si se tiene que $ABDE$ es un paralelogramo, el perímetro del triángulo BCD es $80cm$ y $AB = 100cm$?



Problema 9. En la figura cuatro circunferencias son tangentes y tienen radio de tamaño 1. ¿Cuánto vale el área sombreada?

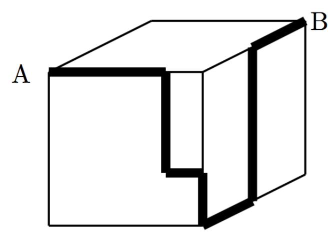


Problema 10. Los marcianos Bongos habitan 3 planetas, uno verde, uno azul y uno rojo. Cada planeta tiene 5 lunas de su color y 3 de cada uno de los 2 restantes. ¿Cuántas lunas que no son verdes hay?

Problema 11. En una tienda de mascotas hay 5 jaulas en fila, numeradas del 1 al 5. Una de ellas tiene un topo, otra un hurón, otra un koala, otra un puerco espín y la otra un ornitorrinco. Se sabe que la jaula del topo y la del hurón están en posición par; que el puerco espín solo tiene un vecino, y que el hurón está junto al puerco espín y el koala. ¿Qué animal está en la jaula de en medio?

Problema 12. ¿Cuántos cubos perfectos hay en la lista de números desde el 1 hasta el 1001?
Nota: Un cubo perfecto es un entero que es producto de 3 enteros iguales. Por ejemplo el $8 = 2 \times 2 \times 2$ es un cubo perfecto.

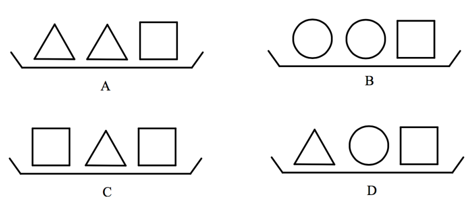
Problema 13. El volumen del cubo que se muestra en la figura es 27. Una hormiga camina desde el punto A hasta el punto B siguiendo la ruta que se muestra en la figura. ¿Cuánto mide la longitud de la trayectoria de la hormiga?



Problema 14. En el país de los flamingos solo existen monedas de 2 y 5 pesos. Entre el 1 y el 100, ¿cuántos precios pueden ser pagados utilizando las monedas existentes y sin necesidad de dar cambio?

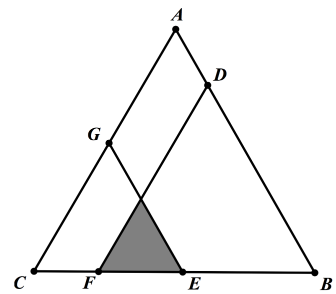
Problema 15. En la tienda de ropa F y R (Fernández y Rivas) hay 5 tipos de camisas y 3 tipos de pantalones. ¿Cuál es la mínima cantidad de maniquíes que se requieren para asegurar que hay dos que están vestidos de la misma manera?

Problema 16. Los platillos A, B y C se acomodan en una mesa del más ligero al más pesado. El más ligero es A, después B y finalmente C. Para conservar el orden de los pesos, ¿dónde debe colocarse el platillo D?



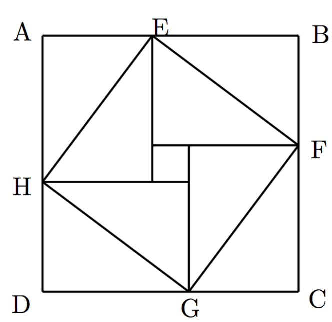
Problema 17. En la siguiente figura los triángulos ABC, FBD y GEC, son equiláteros. Si tenemos que el área sombreada es $\frac{1}{9}$ del área del triángulo ABC y que $AB = 3$, ¿cuánto mide el segmento EF?

Problema 18. Gerardo, Pardo y Lalo comen pan. Pardo come el triple



de pan que Gerardo, además, si le añadimos una pieza de pan a la cantidad que comió Pardo y a lo obtenido lo dividimos entre 4 obtendremos la cantidad de pan que comió Lalo. ¿Cuál es la mínima cantidad de piezas de pan que debió de comer Gerardo para garantizar que todos comieron una cantidad entera de piezas de pan?

Problema 19. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 7 y contiene a 4 rectángulos iguales cuyo lado más grande mide 4. Si a es el área del cuadrilátero $EFGH$ y b es el área del cuadrado $ABCD$, ¿cuánto es $\frac{a}{b+1}$?



Problema 20. En un elevador suben 5 personas en el piso 13, bajan 2 en el piso 10, suben 4 en el piso 7 y suben 3 en el piso 4; luego va directo a la planta baja. Si estaba vacío al abrirse la puerta en el piso 13, ¿cuántas personas llegaron a la planta baja?

Problema 21. Jorge ha decidido repartir sus 44 pesas entre todos sus amigos. Si nadie puede tener la misma cantidad de pesas, ¿cuál es la máxima cantidad de amigos que tiene Jorge?

Problema 22. Tres cajas de marcadores cuestan 54 pesos y una caja de lápices cuesta 17. Juan compró dos cajas de marcadores y tres cajas de lápices. ¿Cuánto pagó?

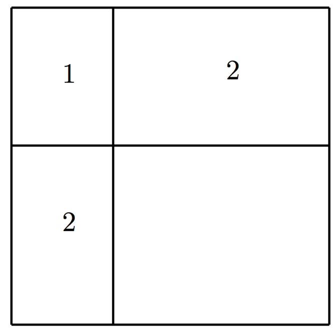
Problema 23. Adri y Diana juegan teléfono descompuesto binario con algunos de sus amigos, en donde los únicos mensajes que se pueden utilizar son SÍ o NO. Adri manda un mensaje, pasa por los demás jugadores hasta que Diana recibe el resultado. Cuando juegan, tanto Ian como Jorge siempre comunican el mensaje opuesto al que reciben (si les dicen SÍ dicen NO y viceversa), Lars siempre comunica el mismo mensaje que recibe, Félix comunica sin alterar el mensaje cuando es de noche e invierte el mensaje cuando es de día y Hugo en todo momento sigue la forma de jugar contraria a la que estaría siguiendo Félix. El jueves, sin importar la hora del día Diana siempre recibió el mensaje de Adri correctamente. Indica cuál de los siguientes amigos no pudieron estar jugando el jueves al mismo tiempo.

- Ian y Jorge
- Félix, Ian y Hugo
- Lars, Ian y Jorge
- Ian, Jorge, Lars, Hugo y Félix
- Lars

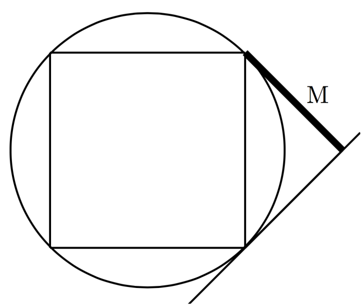
Problema 24. Zeus tiene un costal con 2014 corbatas de varios colores. El color que menos le gusta es el caqui, por lo que tiene menos corbatas color caqui que de cualquier otro color. Si tiene 50 corbatas color caqui, ¿cuántas corbatas debe de sacar Zeus del costal (sin mirar) para garantizar que tendrá al menos una corbata de cada color?

Problema 25. En la siguiente figura se ha anotado dentro del rectángulo el área de cada respectivo rectángulo, ¿cuál es el perímetro del rectángulo faltante?

Problema 26. En un cuarto hay cuatro puertas mágicas, cuando Chinney entra por la puerta 1, sale por la puerta 3; cuando entra por la 2, sale por la 4; cuando entra por la 3, sale por la 2 y cuando entra por la 4, sale por la 1. Si Chinney comienza entrando por la puerta 1 y después de eso, cada que sale de una puerta vuelve a entrar a ella, ¿por cual puerta saldrá Chinney después de 2014 movimientos?
Nota: Se considera un movimiento entrar en una puerta y salir en otra.



Problema 27. Se tiene un cuadrado inscrito en una circunferencia y se trazan 2 tangenetes por vértices consecutivos del cuadrado, como se muestra en la figura. Si M es la longitud del segmento tangente a la circunferencia y el área del cuadrado es 2, ¿cuál es el valor de M?



Problema 28. En una fiesta de 16 personas, Gogo quiere saber quién es el más débil y propone hacer un torneo de fuercitas, a lo que los demás le contestan que lo haga lo más rápido posible para no aburrirse. ¿Cuál es el mínimo número de enfrentamientos que se deben hacer para determinar quién es el más débil?
Nota: Se debe suponer que si A le gana a B y B le gana a C entonces A le ganaría a C.

Problema 29. Los promedios de 4 números tomados por parejas son $3, 5, 7, 7, 9$ y 11, ¿cuál es la suma de los cuatro números?

Problema 30. Por 4 cuadernos y 2 carpetas pago 160 pesos. Por 4 cuadernos y 5 carpetas pago 190. ¿Cuánto vale un cuaderno?

Problema 31. Consideremos los números de 5 cifras formados por los dígitos 1 y 9, ¿en cuántos de ellos aparece el 1 más veces que el 9?

Problema 32. Si los ángulos α, β y γ de un triángulo cumplen que $\gamma = \alpha - \beta$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

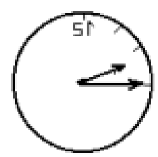
(a) El triángulo es rectángulo.

(b) El triángulo es isósceles.

(c) El triángulo es equilátero.

(d) El triángulo tiene un ángulo mayor a 100°.

Problema 33. Valeria vió este reloj en un espejo. ¿Qué hora es?



Problema 34. Sebastián escribió el número 5812409 en el pizarrón. Llegó Antonio y borró 4 de sus dígitos. Sebastián notó que el número de 3 dígitos que quedó escrito en el pizarrón es el menor número que se puede obtener de borrar 4 dígitos de su número, sin cambiar el orden de los números. ¿Qué números borró Antonio?

Problema 35. Miguel tiene 3 canicas: una azul, otra roja y la tercera blanca. Miguel mete cada una de las canicas en una caja y acomoda las cajas de manera que:

- La caja grande está a la izquierda de la caja chica.
- La canica azul está a la izquierda de la canica blanca.
- La caja mediana está a la derecha de la canica roja.
- La canica blanca está a la derecha de la caja mediana.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) La canica blanca está en la caja grande

b) La caja chica contiene a la canica azul

c) La canica azul está en la caja mediana

d) La canica roja está en la caja mediana

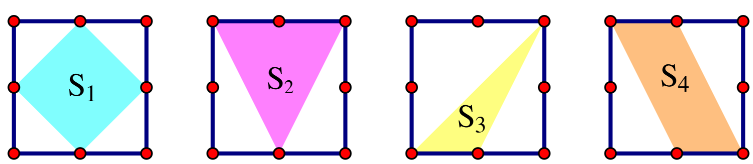
e) No se puede saber en qué caja está qué canica

f) Ninguna de las anteriores es verdadera

Problema 36. Marcos tiene 50 focos, numerados del 1 al 50. A las diez de la mañana alterna prendiendo, en orden, un foco sí, el siguiente no, uno sí, uno no,... empezando con el foco 1 (entonces prende los focos 1, 3, 5 , etc.). A las dos de la tarde cambia de situación los focos que toca, es decir, si el foco estaba prendido, entonces lo apaga y si estaba apagado, lo prende. Empieza por el último y toca, en orden, uno sí, dos no, uno sí, dos no,... (entonces cambia los focos 50, 47, 44, etc.). Al final del día tiene que apagar todos los focos que están prendidos. ¿Cuántos focos apaga Marcos al final del día?

Problema 37. Félix tiene 6 playeras y 3 pantalones. Si se quiere llevar de viaje 2 playeras y 1 pantalones, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

Problema 38. En la figura hay cuatro cuadrados iguales, en los que están marcados los puntos medios de sus lados. Las áreas señaladas son, respectivamente, S_1, S_2, S_3 y S_4. ¿Cuál de las siguientes relaciones es cierta? (Nota: escribir $a < b < c$ es una forma corta de escribir que $a < b$ y $b < c$; escribir $a = b < c$ es una forma corta de escribir $a = b$ y $b < c$).



(a) $S_3 = S_4 < S_2 = S_1$

(b) $S_4 < S_3 < S_1 = S_2$

(c) $S_3 < S_2 < S_1 = S_4$

(d) $S_3 = S_4 = S_1 = S_2$

(e) $S_3 < S_4 = S_2 < S_1$

(f) $S_3 < S_4 = S_1 = S_2$

Problema 39. En la escuela de Santiago hicieron un torneo de fut. El equipo de Santiago ya jugó tres partidos, en ellos metió cuatro goles y le metieron uno. Si por cada juego ganados les dan 3 puntos, por cada empate 1 punto y por cada partido perdido no les dan ningún punto, ¿cuáles son todas las posibles sumas de puntos del equipo de Santiago en este momento?

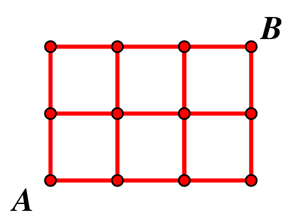
Problema 40. Luis consigue un préstamo por 1000 pesos. Lo tiene que empezar a pagar el primero de diciembre y lo pagará de la siguiente manera. El primero de diciembre pagará 10 pesos, el 2 de diciembre pagará 20 pesos, el 3 pagará 30 pesos y así sucesivamente hasta completar 16 días. ¿Cuánto dinero habrá pagado de intereses al cubrir su último pago?

Problema 41. Oriol tiene 31 bolsas con monedas. Cada bolsa tiene por lo menos dos monedas. Issac sabe que hay 25 bolsas con 3 monedas o más, 15 con 4 monedas o más, 9 con por lo menos 5 monedas y 6 con exactamente 6 monedas. Además, Oriol asegura que ninguna bolsa tiene más de 6 monedas, ¿cuántas monedas tiene Oriol?

Problema 42. Considera un rectángulo $ABCD$. En la prolongación del lado AB se encuentra el punto E de tal manera que $AB = BE$. Si $EC = 10cm$ y $AD = 6cm$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $AECD$?

Problema 43. Tengo un engrane de 5 dientes y otro de 12. Cada minuto los engranes giran un diente. El engrane de 5 dientes tiene una hendidura roja, y el de 12 un diente rojo. Cuando el diente rojo entra en la hendidura roja, suena una campana. ¿Cuántas veces suena la campana en un día?

Problema 44. Una hormiga que está en el punto A quiere caminar al punto B moviéndose sobre las líneas de la cuadrícula. Si quiere hacerlo visitando todos los vértices sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿de cuántas maneras lo puede hacer?



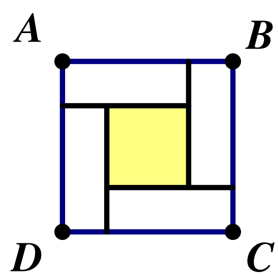
Problema 45. ¿ Cuál es la última cifra de 2^{2015}?

Problema 46. En un mes hay 5 domingos. Ese mes no puede tener

a) 5 sábados b) 5 lunes c) 5 jueves d) 5 martes

e) 5 viernes f) Todas las anteriores pueden suceder.

Problema 47. Dividimos un cuadrado $ABCD$ en cuatro rectángulos iguales y un cuadrado, como se muestra en la figura. Si el perímetro de cada uno de los 4 rectángulos es de $10cm$, ¿cuál es el área del cuadrado $ABCD$?



Problema 48. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado $8cm$. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC, respectivamente. Sea P la intersección de DN y CM. ¿Cuál es el área del triángulo PCN?

Problema 49. Alicia, María e Isabel escriben números naturales de 4 cifras diferentes formados por los dígitos 1, 2, 3 y 4 con la siguientes reglas:

- Alicia hace una lista de todos los que tienen la primera cifra igual a 1.
- María hace una lista de todos los que tienen las 2 primeras cifras formadas por lo dígitos 1 y 2 en cualquier orden.
- Isabel hace una lista de todos los que tienen las 3 primeras cifras formadas por los dígitos 1, 2, y 3 en cualquier orden.

¿ Cuántos números no aparecen en ninguna de las listas?

Problema 50. Naomi está en su casa. Tiene que ir a la tienda, a la escuela, al parque y a la gasolinería y después regresar a su casa. Tiene que ir una y solo una vez a cada lugar. El problema es que el tanque de gasolina de su coche es muy chiquito y cada trayecto entre un lugar y otro consume $\frac{1}{4}$ de tanque de gasolina. Además, cuando llegue a su casa de regreso tiene que seguir teniendo gasolina en el tanque. Cuando va a la gasolinería Naomi llena el tanque. Si ahorita el tanque de gasolina está lleno, ¿de cuántas formas puede realizar sus trayectos Naomi?

Soluciones de los Problemas

Solución 1. Al hacer las operaciones descritas, los números que quedan, en orden cíclico en sentido contrario a las manecillas del reloj son:

$$1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8.$$

Si escojo tres lugares consecutivos, las sumas posibles son:

$$4, 5, 10, 11, 16, 17, 22, 23, 18, 9.$$

Por lo que la mayor suma es 23.

Solución 2. Como el cuadrado $BCEF$ tiene perímetro $36cm$, entonces el lado BF mide $\frac{36}{4} = 9cm$. Como $AB = 2BF$, entonces $AB = 19cm$ y por lo tanto $AF = 18 + 9 = 27cm$. Esto quiere decir que el área del rectángulo $AFED$ es igual a $AD \times AF = 9 \times 27 = 243cm^2$.

Solución 3. Como ambos dijeron lo mismo y no hay días en que ambos mientan, entonces por exactamente uno de los dos está diciendo la verdad. Si Félix estuviera diciendo la verdad, entonces hoy no es domingo, lunes ni martes, pero mañana debe de ser uno de esos tres días. Por lo que hoy debe de ser sábado. Pero si hoy es sábado, entonces Gerardo también debería decir la verdad, lo que quiere decir que mañana domingo debe mentir, lo cual no es cierto. Por lo tanto Félix no pudo decir la verdad. Entonces Gerardo dijo la verdad y, siguiendo un argumento similar al anterior, podemos deducir que el día que lo dijeron es un martes.

Solución 4. Tenemos 4 opciones diferentes para la primera cifra del número. Como las 4 cifras son distintas, la segunda tiene únicamente 3 posibilidades, la tercera 2 y la cuarta ya está determinada. Por lo tanto tenemos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números posibles.

Solución 5. Si hubiera 3 asientos vacíos consecutivos, podría llegar una persona y sentarse en el lugar de en medio, sin quedar a lado de nadie. Por lo tanto, no puede haber tres asientos consecutivos vacíos en ningún lugar. Por otra parte, en las orillas, no puede haber dos asientos vacíos, pues al llegar una persona se podría sentar en la orilla. Numeremos los asientos, en orden, del 1 al 101. Tenemos entonces dos opciones para empezar: que haya una persona en el asiento 1 o que haya una persona en el asiento 2.

Si hubiera una persona en el asiento 1, podríamos dejar los asientos 2 y 3 vacíos y que haya otra persona en el asiento 4, y así sucesivamente. De esta manera todos los múltiplos de 3 estarían vacíos, antes de ellos también estaría vacío y después de ellos habría alguien. Entonces el asiento 100 no estaría vacío y habría 34 personas sentadas.

Si ahora suponemos que el asiento 1 está vacío, pero en el 2 hay una persona, entonces el 3 y 4 estarían vacíos, mientras que en el 5 habría una persona, y así sucesivamente. De esta manera, en el asiento 101 habría una persona, por lo que también habría 34 personas sentadas. Por lo tanto éste es el mínimo para que se cumpla lo que pide el problema.

Solución 6. Pensando en orden cíclico, donde los lugares del círculo se quedan fijos, los acomodos después de los primeros movimientos son:

$$1,2,3,4,5 \to 4,2,3,1,5 \to 4,1,3,2,5 \to 4,5,3,2,1 \to 4,5,1,2,3.$$

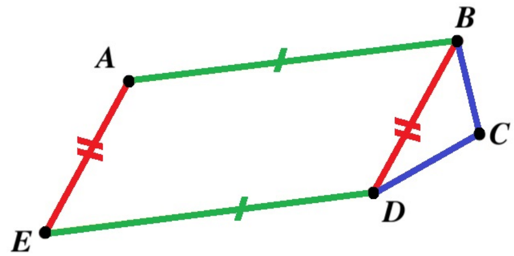
Es decir, después de 4 movimientos el órden de los peces es el mismo con el que empezaron, pero están movidos todos dos lugares hacia la izquierda. Por lo tanto deben de hacer este ciclo de 4 cinco veces, para todos regresar a su lugar. Entonces, después de 4×5 movimientos, todos regresan a su lugar.

Solución 7. Observemos que si escribiera todos los números, entonces la paridad de los números es alternada, es decir *par, impar, par, impar,...*. Ahora veamos cuantos números hay entre el 3 y el 51 realizando una resta:

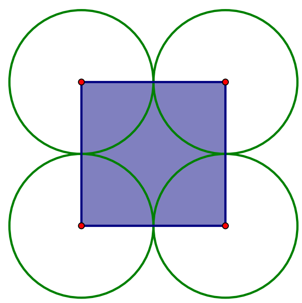
$$51 - 3 = 48$$

y por la observación anterior la mitad de ellos es par. Es decir, Dani escribió $\frac{48}{2} = 24$ números.

Solución 8. Como $ABCD$ es un paralelogramos, entonces $AB = DE$ y $BD = AE$. Tenemos entonces que $AB = DE = 100cm$ y $BC + CD + BD = 80cm$. Necesitamos encontrar la suma de $AB + BC + CD + DE + EA = 100 + 100 + 80 = 280$. Por lo tanto el perímetro del pentángono es de 280 centímetros.



Solución 9. Partiendo en 4 el círculo sombreado y reacomodándolo, es fácil ver que el área sombreada es igual al área del cuadrado de la figura de abajo. Dicho cuadrado tiene lado dos veces el radio del círculo. Es decir, es un cuadrado de lado 2 y por lo tanto tiene área 4.



Solución 10. Cada planeta tiene $5+3\times 2 = 11$ lunas. Por lo que en total hay $11 \times 3 = 33$ lunas. Como hay la misma cantidad de lunas de cada color, entonces hay 11 lunas de cada color y por lo tanto $2 \times 11 = 22$ lunas que no son verdes.

Solución 11. Como el hurón está en una posición par y junto a él están el puerco espín y el koala, entonces en la jaula de en medio tiene que estar el puerco espín o el koala. Pero el puerco espín solo tiene un vecino, por lo que no puede estar en medio. Por lo tanto el koala está en la jaula de en medio.

Solución 12. Notemos que $10 \times 10 \times 10 = 1000$. Por lo tanto el cubo perfecto más grande de la lista es 10^3. Esto quiere decir que los cubos perfectos de la lista son 10, a saber $1^3, 2^3, 3^3 \ldots, 10^3$.

Solución 13. Como el volumen del cubo es 27, entonces el lado del cubo es 3. Si llamamos C al vértice inferior del cubo por donde pasa la hormiga, entonces la distancia que recorre para llegar de A a C equivale a dos lados del cubo. De igual manera, la distancia para llegar de C a B equivale a dos lados del cubo. Por lo tanto al caminar de A a B su trayectoria tiene longitud $4 \times 3 = 12$.

Solución 14. No es difícil ver que no podemos pagar de manera exacta algo que cueste 1 o 3 pesos. Por otra parte, podemos pagar de manera exacta cualquier cantidad par. Ahora, una cantidad impar mayor a 5 la podemos pensar como $5 + a$, donde a es una cantidad par. Como podemos pagar a y podemos pagar 5, entonces podemos pagar $5 + a$. Por lo tanto las únicas dos cantidades que no podemos pagar son 1 y 3 y entonces hay 98 precios que podemos pagar utilizando las monedas y sin necesidad de cambio.

Solución 15. Como hay 5 camisas y 3 pantalones, entonces hay $5 \times 3 = 15$ posibles combinaciones de formas de vestir un maniquí. Para que estemos seguros que hay dos iguales, entonces tiene que haber al menos 16 maniquoíes.

Solución 16. Como B pesa más que A, entonces un círculo pesa más que un triángulo. Eso quiere decir que D pesa menos que B (pues ambos tienen un círculo y un cuadrado, pero B tiene un círculo y D un triángulo). Razonando de manera parecida, A pesa menos que D, pues la diferencia entre ellos es que A tiene un triángulo y D un círculo. Entonces el platillo D debe de ser colocado entre A y B.

Solución 17. Usando el teorema de Pitágoras sabemos que si un triángulo rectángulo tiene lado l, entonces su altura mide $l \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, y por lo tanto su área es un medio de $l \times (l \times \frac{\sqrt{3}}{2})$, es decir, $\frac{l^2 \times \sqrt{3}}{2}$.

Entonces el área del triángulo ABC es $\frac{9 \times \sqrt{3}}{2}$, mientras que el área sombreada es $\frac{(EF)^2 \times \sqrt{3}}{2}$. El problema nos dice que

$$\frac{1}{9} = \frac{\frac{(EF)^2 \times \sqrt{3}}{2}}{\frac{9 \times \sqrt{3}}{2}} = \frac{(EF)^2}{9}.$$

Por lo tanto el segmento EF mide 1.

Solución 18. Notemos que si Gerardo no come pan, entonces Pardo tampoco, por lo que Lalo comería $\frac{1}{4}$ de pieza, lo cual no es entero. Ahora, si Gerardo come una pieza de pan, entonces Pardo come 3 piezas de pan. De esta manera, Lalo come $\frac{3+1}{4} = 1$ pieza de pan. En este caso todos comen una cantidad entera, por lo que la cantidad mínma que debió comer Gerardo es 1 pieza de pan.

Solución 19. Como el lado grande de uno de los rectángulos mide 4, entonces el lado chico mide 3. Por el teorema de Pitaágoras tenemos que $(EH)^2 = 4^2 + 3^2$. Es decir, EH mide 5. Por lo tanto el área del cuadrado $EFGH$ es 25. En otras palabras, $a = 25$ Por otra parte, como $ABCD$ tiene lado 7, su área es 49. Esto quiere decir que $b + 1 = 50$, por lo que $\frac{a}{b+1} = \frac{1}{2}$.

Solución 20. Vamos a realizar sumas y restas, considerando a los que entran y salen respectivamente,

$$entran : 5 + 4 + 3 = 12$$

$$salen : 2 = 2$$

por tanto

$$permanecen : 12 - 2 = 10 personas$$

. Es decir, al llegar a la planta baja hay 10 personas.

Solución 21. Como queremos encontrar la mayor cantidad de amigos que puede tener Jorge, lo mejor es que a sus amigos les toque la menor cantidad de pesas posibles. Como todos sus amigos tienen cantidades diferentes de pesas, entonces podemos asignarle 1 al primero 2 al segundo y así sucesivamente. Observamos que si Jorge tuviera 9 amigos, entonces les tendría que repartir $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ pesas. Pero como tiene únicamente 44, Jorge tiene a lo más 8 amigos. Ahora, le puede repartir las pesas a sus 8 amigos de la siguiente manera: al primer amigo le da 1 pesa, al segundo 2 y así sucesivamente hasta al séptimo amigo le da 7 pesas. Para ese momento ha repartido $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$ pesas, por lo que le da al octavo $44 - 28 = 16$ pesas. Entonces la máxima cantidad de amigos que Jorge puede tener es 8.

Solución 22. Necesitamos encontrar el precio de una caja de marcadores, si tres cuestan 54, entonces 1 caja cuesta $\frac{54}{3} = 18$ pesos. Ahora, la cuenta de Juan nos queda como:

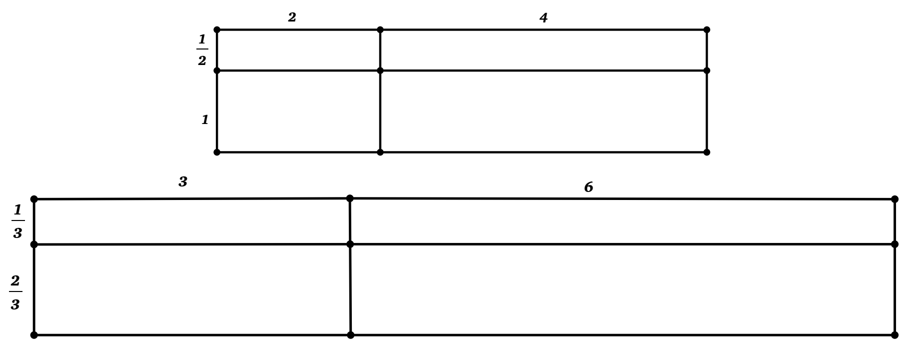
$$2(18) + 3(17) = 36 + 51 = 87$$

respuesta a.

Solución 23. Ian, Jorge, Lars, Hugo y Félix no pudieron estar jugando al mismo tiempo. Esto se debe a que ya sea Ian, Jorge y Félix o Ian, Jorge y Hugo van a cambiar el mensaje, mientras que los otros dos jugadores lo pasan correctamente. Esto quiere decir que el mensaje cambia de correcto a incorrecto o de incorrecto a correcto 3 veces, por lo que siempre acaba siendo incorrecto.

Solución 24. Para asegurar que tiene una corbata color caqui tiene que sacar $2014 - 49 = 1965$ corbatas (pues las primeras 1964 podrán ser todas de colores diferentes al caqui). Ahora, si saca 1965 corbatas del costal, le quedan en el costal únicamente 49 corbatas. Pero como de todos los colores tiene 50 corbatas o más, entonces Zeus ya tuvo que sacar una corbata de cada color. Por lo tanto necesita sacar 1965 para asegurar que tendrá al menos una de cada color.

Solución 25. Con la información que nos da el problema, no se puede determinar el perímetro. Los dos rectángulos con las medidas de las figuras cumplen con las condiciones del problema y los perímetros de los rectángulos faltantes son 10 y $\frac{40}{3}$, respectivamente.



Solución 26. Como Chinney comienza entrando por la puerta 1, sale por la puerta 3, después entra por la 3 y sale por la 2. Cuando entra por la 2 sale por la 4 y al entrar por la 4 sale por la 1. Es decir, después de 4 movimientos Chinney regresa a la puerta 1. Por lo tanto, ésto pasa también después de $8, 12, 16, \ldots 2012$ movimientos. Es decir, después de 2012 moviemientos Chinney sale por la puerta 1. Después del siguiente movimiento sale por la puerta 3 y después del siguiente por la puerta 2. Por lo tanto, después de 2014 movimientos Chinney sale por la puerta 2.

Solución 27. Sean A y B los dos vértices consecutivos del cuadrado de los cuales se consideran las tangentes y sea P el punto de intersección de las tangentes. Llamemos O al centro del círculo. Las dos tangentes a la circunferencia tienen el mismo tamaño, entonces $\triangle ABP$ es isósceles. Además, $\angle OAP = 90^o$ y $\angle OAB = 45^o$, por lo que el triángulo $\triangle ABP$ es rectángulo. Usando el teorema de Pitágoras sabemos que $AP^2 + BP^2 =$

AB^2. Y como el área del cuadrado es 2, entonces $AB^2 = 2$. Es decir, $2 \times AP^2 = 2$, de donde obtenemos que el valor de M es 1.

Solución 28. Para hacer el torneo lo más rápido posible, cualquier persona que gane un enfrentamiento queda eliminado.

Solución 29. Como el promedio de los dos números más pequeños es 3, entonces la suma de los dos números más pequeños es 6. De manera similar, como el promedio de los dos más grandes es 11, entonces su suma es 22. Por lo tanto la suma de los cuatro es $6 + 22 = 18$.

Solución 30. La segunda compra fue igual a la primera salvo que se adquirieron 3 carpetas más. Notemos que la diferencia fue de $190 - 160 = 30$ pesos. Esto quiere decir que cada carpeta cuesta $\frac{30}{3} = 10$ pesos. Entonces en la primera compra las dos carpetas juntas costaron 20 pesos, por lo que los 4 cuadernos juntos costaron $160 - 20 = 140$ pesos. De aquíŋ que cada cuaderno valga $\frac{140}{4} = 35$ pesos.

Solución 31. Notemos que hay 32 números de cinco cifras que se pueden formar con los díŋgitos 1 y 9, ya que por cada cifra hay dos posibles dígitos que se pueden escoger para poner en esa posición. Ahora notemos que por ser cinco un número impar, alguno de los dos díŋgitos debe aparecer más veces que el otro. Además a cada uno de estos números de cinco cifras donde aparece el 1 más veces que el 9, podemos asociarle un único número de cinco cifras donde aparece el 9 más veces que el 1, y viceversa. E?sto se hace cambiando los díŋgitos $1 \to 9$ y $9 \to 1$. Esto quiere decir que hay la misma cantidad de números donde aparece el 1 más veces que el 9 que de números donde aparece el 9 más veces que el 1. Por lo tanto hay $\frac{32}{2} = 16$ números de cinco cifras donde aparece el 1 más veces que el 9.

Solución 32. Como la suma de los ángulos de un triángulo es $180°$, sustituyendo γ tenemos que

$$180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + (\alpha - \beta) = 2\alpha.$$

De aquíŋ que $\alpha = \frac{180°}{2} = 90°$. Es decir, nuestro triángulo es un triángulo rectángulo. La respuesta es a).

Solución 33. Como el reloj está visto en espejo, la manecilla grade apunta a las 9, es decir, a los 45 minutos. La manecilla chica ya pasó las 9, pero aún no llega a las 10. Por lo tanto son las $9:45$.

Solución 34. El número de 3 dígitos más pequeño que se puede obtener es el 120. Por lo tanto Antonio borró el $5, 8, 4$ y 9.

Solución 35. Como la canica blanca está a la derecha de la caja mediana y esta a su vez está a la derecha de la canica roja, entonces la caja mediana está en medio. Como la caja grande está a la izquierda de la caja chica, entonces la caja grande tiene la canica roja y la caja chica tiene la canica blanca. Por lo tanto la caja mediana tiene a la canica azul y la respuesta correcta es c).

Solución 36. En la mañana Marcos prende todos los focos con número impar. En la tarde, prende los focos 50, 44, 38, 32, 26, 20, 14, 8 y 2 y apaga los focos 47, 41, 35, $29, 23$, 17, 11 y 5. Entonces, al final del día tiene que apagar los focos 1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 49 y 50. Por lo tanto Marcos apaga 26 focos al final del día.

Solución 37. Félix puede escoger las 6 playeras de $\frac{6\times5}{2} = 15$ formas y los pantalones de 3 formas, por lo que puede hay $15 \times 3 = 45$ formas en las que puede decidir qué ropa llevar.

Solución 38. Llamemos $2l$ al lado del cuadrado que aparece en las cuatro figuras, entonces $S = 4l^2$ es área de dicho cuadrado . Entonces, el lado del cuadrado de S_1 es $l\times\sqrt{2}$, por lo que $S_1 = 2l^2$. Es decir, $S_1 = \frac{S}{2}$. El triángulo de S_2 tiene base $2l$ y altura $2l$, por lo que su área es $\frac{2l\times2l}{2} = 2l^2$ y $S_1 = S_2$. Ahora el triángulo de S_3 tiene base l y altura $2l$, por lo que $S_3 = l^2$. Finalmente el paralelogramo de S_4 tiene base l y altura $2l$ por lo que tenemos que $S_4 = 2l^2 = S_1 = S_2$. Entonces, la última opción es la correcta.

Solución 39. El equipo de Santiago pudo haber perdido, cuando mucho, un partido. De ser así, ese partido tuvo que haber quedado $0-1$. En los otros dos partidos, el equipo metió cuatro goles, por lo que pudo haber ganado los dos partidos, en cuyo caso tendría 6 puntos o haber ganado uno $4-0$ y haber empatado el otro $0-0$, en cuyo caso tendría 4 puntos.

Supongamos ahora que no perdieron ningún partido. Entonces, pudieron haber empatado dos y ganado uno (por ejemplo con marcadores $0-0$, $1-1$ y $3-0$), haber empatado uno y ganado dos (por ejemplo con marcadores $1-1$, $1-0$ y $2-0$) o haber ganado los tres (con marcadores $1-0$, $1-0$ y $2-0$). En el primer caso tendrían 5 puntos, en el segundo 7 puntos y en el tercero 9 puntos. Por lo tanto las sumas posibles de puntos son $4, 5, 6, 7$ y 9.

Solución 40. Luis pagará $10+20+30+\ldots+160 = 10\times(1+2+3+\ldots16) = 10\times(\frac{17\times16}{2}) = 10\times136 = 1360$. Como el préstamo era de 1000, habrá pagado $1360-1000 = 360$ pesos de interés.

Solución 41. Como hay 25 bolsas con 3 monedas o más y cada bolsa tiene al menos dos monedas, entonces hay $31 - 25 = 6$ bolsas con exactamente dos monedas. Ahora, con exactamente tres monedas hay $25 - 15 = 10$ bolsas, ya que hay 25 bolsas con 3 o más monedas, pero de esas 15 tienen cuatro monedas o más. De la misma manera hay $15 - 9 = 6$ bolsas con exactamente cuatro monedas y $9 - 6 = 3$ bolsas con exactamente 5 monedas. Entonces, Oriol tiene en total $6 \times 2 + 10 \times 3 + 6 \times 4 + 3 \times 5 + 6 \times 6 = 12 + 30 + 24 + 15 + 36 = 117$ monedas.

Solución 42. Fijémonos en el triángulo BCE. Es un triángulo rectángulo que tiene un cateto que mide $6cm$, mientras que su hipotenusa mide $10cm$. Por el teorema de Pitágoras el otro cateto mide $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8cm$. Por lo tanto el área del triángulo BCE es $\frac{8 \times 6}{2} = 24cm^2$. Ahora, como $AB = BE$, entonces $AB = 8cm$ y el área del rectángulo $ABCD$ es $8 \times 6 = 48cm^2$. Por lo tanto el área del cuadrilátero $AECD$ es $72cm^2$.

Solución 43. El engrane de 5 dientes tarda 5 minutos en dar una vuelta, mientras que el de 12 dientes tarda 12 minutos en dar una vuelta. Entonces, para que los engranes vuelvan a estar en la posición que están ahora, necesitamos esperar $5 \times 12 = 60$ minutos. Es decir, cada 60 minutos se repite la posición de los engranes. Por lo que cada 60 minutos la campana suena. Como un día tiene 24 horas y la campana suena cada hora, sonará 24 veces en un día.

Solución 44. De 4 formas.

Solución 45. Veamos que:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64, \ldots$$

Como solo nos queremos fijar en la útima cifra, vemos que la sucesión va $2, 4, 8, 6, 2, 4, 6, 8, \ldots$ y estamos buscando el término 2015 de esa sucesión. Entonces observamos que la sucesión se repite cada 4 números y que $2015 = 503 \times 4 + 3$, por lo que 2^2015 termina en 8.

Solución 46. Un mes tiene entre 28 y 31 días. Si el mes tiene 28 días, no puede haber 5 domingos. Si tiene 29 días, puede haber 5 domingos, pero de todos los demás días de la semana hay solo 4. Si tiene 30 días y hay 5 domingos, podría haber 5 sábados o 5 lunes, pero no ambos. Finalmente si tiene 31 días, podría haber ya sea 5 viernes y 5 sábados (si el mes acaba en domingo), 5 sábados y 5 lunes (si acaba en lunes) o 5 lunes y 5 martes (si acaba en martes). Es decir, el mes no puede tener ni 5 miércoles ni 5 jueves. La respuesta correcta es c).

Solución 47. Dado que el perímetro de cada uno de los rectángulos es $2l + 2L$, donde l es el lado pequeño del rectángulo y L el lado grande, entonces tenemos que $l + L = 5$. Pero notamos que esta suma es igual al lado del cuadrado $ABCD$. Por lo tanto el área del cuadrado $ABCD$ es de $25cm^2$.

Solución 48. Primero notemos que, por el teorema de Pitágoras, $ND = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$. Como $80 = 16 \times 5$, entonces $4\sqrt{5} = \sqrt{80} = ND = NP + PD$.

Ahora, si rotamos la línea DN un ángulo de 90^o con respecto al centro del cuadrado, entonces obtenemos la línea CM. Esto quiere decir que el ángulo entre DN y CM es de 90^o.

De nuevo por Pitágoras tenemos que $4^2 = NC^2 = NP^2 + PC^2$

Solución 49. Ninguno de los números que empiezan con 4 están en las listas. Estos son: 4321, 4231, 4213, 4132 y 4123. De los que empiezan con la cifra 3, no están los que en las primeras dos cifras tienen al 4. Estos son: 3412, 3421, 3142 y 3241. Finalmente de los que empiezan con el 2, no están los que como segunda cifra tienen al 3 o al 4. Estos son: 2314, 2341, 2413 y 2431. En total hay 13 números que no aparecen en ninguna de las listas.

Solución 50. Como al regresar a su casa el tanque de gasolina no puede estar vacío, entonces Noemi debe visitar cuando mucho 2 lugares más, después de ir a la gasolinería y antes de regresar a su casa. Entonces, visita la gasolinería ya sea en segundo, tercer o cuarto lugar. Por lo tanto tiene 3 opciones para escoger el lugar que va a visitar primero (puede ser la tienda, la escuela o el parque). Después de eso, le quedarán 3 lugares por visitar y puede hacerlo en el órden que ella quiera, por lo que tiene 3 opciones para la primera parada, 2 para la segunda y 1 para la tercera. Entonces, en total tiene $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ formas de realizar sus trayectos.

Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Ciudad de México

Cubículo 214
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
omdf@im.unam.mx
www.omdf.matem.unam.mx